

А. С. Касаткин
М. В. Немцов

ЭЛЕКТРО- ТЕХНИКА

В двух книгах
Книга 1

5-е издание, переработанное
и дополненное

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов неэлектротехнических специальностей высших учебных заведений



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1995

ББК 31.21
К 28
УДК 621.3(075.8)

Рецензент Кафедра электротехники, электроники и автоматики
Московского станкоинструментального института
(зав. кафедрой проф. О. П. Михайлов)

Касаткин А. С., Немцов М. В.

К 28 Электротехника: Учеб. пособие для вузов. — В 2-х кн.:
кн. 1. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат,
1995. — 240 с.: ил.

ISBN 5-283-00659-X

Изложены основные положения теории электрических цепей, основ промышленной электротехники, электрических измерений. Дано описание устройства и рабочих свойств электрических машин. Приведены сведения об электроприводе.

Четвертое издание вышло в 1983 г. Пятое издание, выпускаемое в двух книгах, переработано в соответствии с новой программой.

Для студентов неэлектрических специальностей вузов.

К $\frac{2202020000-021}{051(01)-95}$ 22-92

ББК 31.21

ISBN 5-283-00659-X (кн. 1)
ISBN 5-283-00667-0

© Энергоатомиздат, 1983
© Авторы, 1995

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее учебное пособие, выпускаемое в двух книгах, предназначено для изучения курса "Электротехника" студентами неэлектротехнических специальностей. Его содержание соответствует действующей типовой программе курса. В зависимости от состава специальностей, принятой методики изложения и рабочих программ различных вузов последовательность изложения тем и степень их детализации могут варьироваться.

Курс "Электротехника" служит для общинженерной подготовки студентов и создания теоретической базы при изучении последующих специальных дисциплин, связанных с автоматизацией технологических процессов, электроснабжением и электрооборудованием соответствующих отраслей.

В учебном пособии в основном сохранена последовательность изложения тем, принятая в предыдущем издании. При переработке пособия часть материалов, не рекомендованная типовой программой, была сокращена, например электровакуумные приборы и устройства (гл. 11), заменена, например описание свойств линейных четырехполюсных схем дано на основе уравнений с матрицами Y и H (§ 2.26) вместо A -параметров, или исключена, например магнитные усилители. Включен материал по анализу нелинейных электрических цепей (гл. 6), полностью переработана гл. 10 и частично гл. 1, 3, 5, 9 и 14.

При подготовке пятого издания учтены критические замечания рецензента проф. О. П. Михайлова, а также отзывы кафедры электротехники Московского инженерно-физического института, кафедры электротехники и интроскопии МЭИ, руководимой заслуженным деятелем науки и техники проф. В. Г. Герасимовым, проф. кафедры электротехники и электроники МИТХТ им. М. В. Ломоносова А. В. Нетушила и других членов Научно-методического совета по электротехнике.

Отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10, Энергоатомиздат.

М. В. Немцов

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА ПОСТОЯННОГО ТОКА

Систематическое исследование электрических явлений и их практических приложений исторически началось с изучения свойств не изменяющегося во времени тока — постоянного тока на рубеже XVIII—XIX вв. Этому способствовали наличие и доступность источников электрической энергии постоянного тока — сначала гальванических элементов (А. Вольта, 1745–1827), позднее аккумуляторов, а также первые успехи применения электричества для освещения (П. Н. Яблочков, 1847–1894), электролиза и гальванопластики (Б. С. Якоби, 1801–1874).

Экспериментальное исследование свойств постоянного тока позволило выявить и обосновать ряд закономерностей и понятий (А. М. Ампер, 1775–1836; Г. С. Ом, 1787–1854; Ш. О. Кулон, 1736–1806 и др.). Дальнейшие исследования (М. Фарадей, 1791–1867; Э. Х. Ленц, 1804–1865; Д. Генри, 1797–1878; В. Сименс, 1816–1892; Д. П. Джоуль, 1818–1889; В. Э. Вебер, 1804–1891; Д. К. Максвелл, 1831–1879; Г. Р. Герц, 1857–1894 и др.) показали, что большинство закономерностей, первоначально полученных при анализе цепей постоянного тока, являются фундаментальными законами электротехники.

Термином *электротехническое устройство* принято называть промышленное изделие, предназначенное для определенной функции при решении комплексной проблемы производства, распределения, контроля, преобразования и использования электрической энергии. Электротехнические устройства постоянного тока весьма разнообразны, например аккумулятор, линия передачи энергии, амперметр, реостат. Постоянный ток применяется при электрохимическом получении алюминия, на городском и железнодорожном электротранспорте, в электронике, медицине и других областях науки и техники.

Быстрыми темпами развиваются и совершенствуются различные типы источников электрической энергии постоянного тока. Так, солнечные батареи и фотоэлементы служат основными источниками энергии космических аппаратов в автономном полете. Разрабатываются новые источники электрической энергии постоянного тока — МГД-генераторы. Их освоение позволит в перспективе существенно повысить КПД электрических станций.

1.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрическая цепь, или, короче, цепь, постоянного тока в общем случае содержит источники электрической энергии, приемники электрической энергии, измерительные приборы, коммутационную аппаратуру, соединительные линии и провода.

В *источниках электрической энергии* осуществляется преобразование в электрическую энергию каких-либо других форм энергии, например энергии химических процессов в гальванических элементах и аккумуляторах, тепловой энергии в термопреобразователях на основе термопар.

В *приемниках электрической энергии* электрическая энергия преобразуется, например, в механическую (двигатели постоянного тока), тепловую (электрические печи), химическую (электролизные ванны).

Коммутационная аппаратура, линии и измерительные приборы служат для передачи электрической энергии от источников, распределения ее между приемниками и контроля режима работы всех электротехнических устройств.

Графическое изображение электрической цепи называется *схемой*. Различают несколько способов изображения цепи. На рис. 1.1 в качестве примера приведено эскизное изображение электротехнических устройств и способа их соединения в простейшей цепи постоянного тока. При замыкании рубильника 1 к лампе накаливания 2 — приемнику электрической энергии — подключается источник электрической энергии постоянного тока — аккумуляторная батарея 3. Для контроля режима приемника энергии включены амперметр 4 и вольтметр 5. Но натурное изображение электротехнических устройств и их соединений приводит к громоздким и трудоемким чертежам. Изображение цепи можно упростить, если каждое электротехническое устройство заменить (по

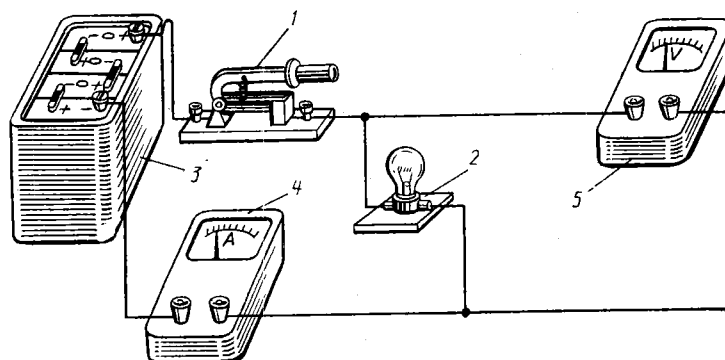


Рис. 1.1

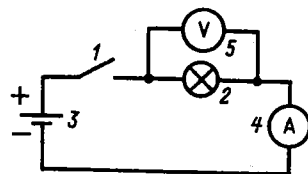


Рис. 1.2

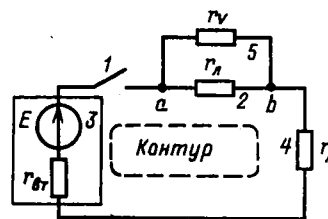


Рис. 1.3

правилам ГОСТ) его условным обозначением (рис. 1.2). Такие графические изображения цепей называются *принципиальными схемами*. Принципиальная схема показывает назначение электротехнических устройств и их взаимодействие, но неудобна при расчетах режима работы цепи. Для того чтобы выполнить расчет, необходимо каждое из электротехнических устройств представить его схемой замещения.

Схема замещения электрической цепи состоит из совокупности различных идеализированных элементов, выбранных так, чтобы можно было с заданным или необходимым приближением описать процессы цепи.

Конфигурация схемы замещения цепи определяется следующими геометрическими (топологическими) понятиями: ветвь, узел, контур. *Ветвь* схемы состоит из одного или нескольких последовательно соединенных элементов, каждый из которых имеет два вывода (начало и конец), причем к концу каждого предыдущего элемента присоединяется начало следующего. В узле схемы соединяются три или большее число ветвей. *Контур* — замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям так, что ни одна ветвь и ни один узел не встречается больше одного раза.

Схема замещения (рис. 1.3) цепи, показанной на рис. 1.1, содержит три ветви, причем две состоят из одного элемента каждая, а третья — из трех элементов. На рисунке указаны параметры элементов: $r_{л}$ — сопротивление цепи лампы, r_{V} — сопротивление цепи вольтметра, r_{A} — сопротивление цепи амперметра, E — ЭДС аккумулятора и $r_{вт}$ — его внутреннее сопротивление. Три ветви соединены в двух узлах a и b .

Если значения параметров всех элементов схемы замещения цепи известны, то, пользуясь законами электротехники, можно рассчитать режим работы всех ее элементов, т. е. определить электрическое состояние всех электротехнических устройств.

В дальнейшем вместо термина *схема замещения электрической цепи* будем пользоваться сокращенными; схема цепи и, еще короче, схема.

1.3. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Согласно электронной теории электропроводности валентные электроны в металлах легко отделяются от атомов, которые становятся положительными ионами. Ионы образуют в твердом теле кристаллическую решетку с пространственной периодичностью. Свободные электроны хаотически движутся в пространстве решетки между атомами (тепловое движение), сталкиваясь с ними.

Под действием продольного электрического поля напряженностью $\mathcal{E}$, создаваемого в проводнике длиной l источником электрической энергии, свободные электроны приобретают добавочную скорость (дрейфовую скорость) и дополнительно перемещаются в одном направлении (вдоль проводника на рис. 1.4).

В общем случае *постоянный ток* в проводящей среде представляет собой упорядоченное движение положительных и отрицательных зарядов под действием электрического поля, например в электролитах и газах движутся навстречу друг другу ионы с положительными и отрицательными зарядами. Так как направления движения положительных и отрицательных зарядов противоположны, то необходимо договориться о том, движение каких зарядов следует считать направлением тока. Принято считать направлением тока I направление движения положительных зарядов, т. е. направление, обратное направлению движения электронов в проводнике под действием электрического поля (рис. 1.4). Это направление показано стрелкой.

Постоянный ток $I = |Q|/t$, где t — время равномерного перемещения суммарного заряда $|Q|$ через поперечное сечение рассматриваемого участка цепи.

Основная единица тока в международной системе единиц (СИ) — **ампер** (А)*, заряда — кулон (Кл).

Напряжением называется скалярная величина, равная линейному интегралу напряженности электрического поля. **Разность потенциалов** — напряжение в безвихревом электрическом поле, в котором напряжение не зависит от пути интегрирования. (Электрическое поле цепи постоянного тока — безвихревое.) Она вычисляется вдоль любых участков цепи, не содержащих ЭДС источников.

Постоянное напряжение для участка проводника (рис. 1.4)

$$U = \int_a^b \mathcal{E} \, dl = \varphi_a - \varphi_b$$

* При постоянном токе 1 А в двух параллельных прямолинейных проводниках бесконечной длины и ничтожно малой площади поперечного кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, сила их взаимодействия равна $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м (ньютон на метр.)

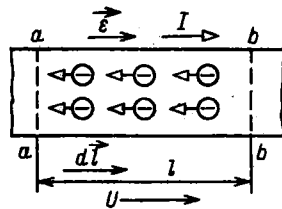


Рис. 1.4

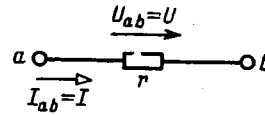


Рис. 1.5

или

$$U = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{1}{q} \int_a^b \mathbf{F} d\mathbf{l} = \frac{A}{q},$$

где $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ — сила, которая действовала бы на положительный заряд q в однородном постоянном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}$;

$A = \int_a^b \mathbf{F} d\mathbf{l}$ — работа электрического поля при перемещении положи-

тельного заряда вдоль участка проводника; φ_a и φ_b — потенциалы однородного постоянного электрического поля в поперечных сечениях a и b участка проводника.

Основная единица напряжения в системе СИ — вольт (В), напряженности электрического поля — вольт на метр (В/м).

При расчете цепи действительные направления токов в ее элементах в общем случае заранее не известны. Поэтому необходимо предварительно выбрать условные положительные или, короче, положительные направления токов во всех элементах цепи.

Положительное направление тока в элементе (с сопротивлением r на рис. 1.5) или в ветви выбирается произвольно и указывается стрелкой. Если при выбранных положительных направлениях токов в результате расчета режима работы цепи ток в данном элементе получится положительным, т. е. имеет положительное значение, то действительное направление тока совпадает с выбранным положительным. В противном случае действительное направление противоположно выбранному положительному.

Положительное направление напряжения на элементе схемы цепи (рис. 1.5) также может быть выбрано произвольно и указывается стрелкой, но для участков цепи, не содержащих источников энергии, рекомендуется выбирать его совпадающим с положительным направлением тока, как на рис. 1.5.

Если выводы элемента обозначены (например, a и b на рис. 1.5) и стрелка направлена от вывода a к выводу b , то положительное направление означает, что определяется напряжение

$$U = U_{ab}.$$

Аналогичное обозначение можно принять и для тока. Например, обозначение I_{ab} указывает положительное направление тока в элементе цепи или схемы от вывода a к выводу b .

1.4. РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Столкновения свободных электронов в проводниках с атомами кристаллической решетки тормозят их поступательное (дрейфовое) движение. Это противодействие направленному движению свободных электронов, т. е. постоянному току, составляет физическую сущность *сопротивления* проводника. Аналогичен механизм сопротивления постоянному току в электролитах и газах.

Для участка цепи с сопротивлением r (рис. 1.5) ток и напряжение связаны простым соотношением — *законом Ома*:

$$U_{ab} = rI_{ab} \quad \text{или} \quad U = rI. \quad (1.1)$$

Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*: $g = 1/r$.

Основная единица сопротивления в системе СИ — *ом* (Ом), проводимости — *сименс* (См).

Проводящие свойства материала определяют его *объемное удельное сопротивление* ρ_V , равное сопротивлению между противоположными сторонами куба с ребром 1 м, изготовленного из данного материала. Величина, обратная объемному удельному сопротивлению, называется *объемной удельной проводимостью*: $\gamma_V = 1/\rho_V$.

Единицей объемного сопротивления служит 1 Ом·м, объемной удельной проводимости — 1 См/м.

Сопротивление проводника постоянному току зависит от температуры. В общем случае наблюдается достаточно сложная зависимость. Но при изменениях температуры в относительно узких пределах (примерно 200 °С) ее можно выразить формулой

$$r_2 = r_1[1 + \alpha(\Theta_2 - \Theta_1)],$$

где r_1 и r_2 — сопротивления соответственно при температурах Θ_1 и Θ_2 ; α — температурный коэффициент сопротивления, равный отношению изменению сопротивления при изменении температуры на 1 °С.

В табл. 1.1 приведены значения объемного удельного сопротивления и температурного коэффициента сопротивления некоторых материалов, где 1 мкОм = 10^{-6} Ом.

Электротехническое устройство, обладающее сопротивлением и применяемое для ограничения тока, называется *резистором*. Регулируемый резистор называется *реостатом*. Условные обозначения различных типов резисторов даны в табл. 1.2.

Таблица 1.1. Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления некоторых проводниковых материалов

Материал	Объемное удельное сопротивление при 20 °С, мкОм · м	Температурный коэффициент сопротивления (на 1 °С)
Серебро	0,016	0,0035
Медь техническая	0,0172–0,0182	0,0041
Алюминий	0,0295	0,0040
Сталь	0,125–0,146	0,0057
Железо	0,09–0,11	0,0060
Чугун	0,15	0,001
Свинец	0,218–0,222	0,0039
Вольфрам	0,0503	0,0048
Уголь	10–60	– 0,005
Манганин (сплав: Cu – 85%, Mn – 12%, Ni – 3%)	0,040–0,52	0,00003
Константан	0,44	0,00005
Нихром (сплав: Cr – 20%, Ni – 80%)	1,02–1,12	0,0001

Таблица 1.2. Условные графические изображения резисторов

Наименование	Условное изображение
Резистор: постоянный	
с отводами	
переменный (реостат)	
с разрывом цепи	
без разрыва цепи	
переменный (реостат) со ступенчатым регулированием	
саморегулирующийся нелинейно, например в зависимости от параметра внешней среды П	

Резистивными элементами называются идеализированные модели резисторов и любых других электротехнических устройств или их частей, оказывающих сопротивление постоянному току независимо от физической природы этого явления. Они применяются при составлении схем замещения цепей и расчетах их режимов. При идеализации пренебрегают токами через изолирующие покрытия резисторов, каркасы проводочных реостатов и т. п.

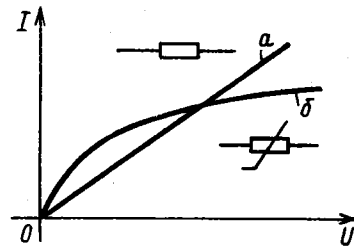


Рис. 1.6

Линейный резистивный элемент является схемой замещения любой части электротехнического устройства, в которой ток пропорционален напряжению. Его параметром служит сопротивление $r = \text{const}$.

Если зависимость тока от напряжения нелинейна, то схема замещения содержит нелинейный резистивный элемент, который задается нелинейной вольт-амперной характеристикой $I(U)$. На рис. 1.6 приведены вольт-амперные характеристики (ВАХ) линейного и нелинейного резистивных элементов (линии а, б), а также условные обозначения их на схемах замещения.

1.5. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Рассмотрим источник энергии на примере гальванического элемента. Один из типов гальванических элементов (рис. 1.7, а) представляет собой две пластины — из меди Cu и из цинка Zn, помещенные в раствор серной кислоты $\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}$.

Вследствие химических процессов положительные ионы цинка Zn^{++} переходят в раствор серной кислоты, оставляя на цинковой пластине избыток отрицательных свободных зарядов. Одновременно в растворе серной кислоты тяжелые и малоподвижные положительные ионы цинка Zn^{++} оттесняют легкие и подвижные положительные ионы водорода H^+ к медной пластине, на поверхности которой происходит восстановление нейтральных атомов водорода. При этом медная пластина теряет свободные отрицательные заряды, т. е. заряжается положительно. Между разноименно заряженными пластинами возникает однородное электрическое поле с напряженностью $\mathcal{E}$, которое препятствует направленному движению ионов в растворе. При некотором значении напряженности поля $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ накопление зарядов на пластинах прекращается. Напряжение или разность потенциалов между пластинами, при которой накопление зарядов прекращается, служит количественной мерой *стопонной силы* (в данном случае химической природы), стремящейся к накоплению заряда.

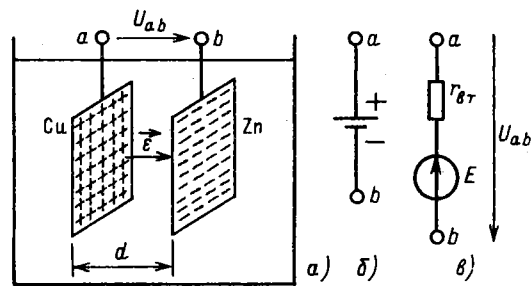


Рис. 1.7

Количественную меру сторонней силы принято называть *электродвижущей силой* (ЭДС). Для гальванического элемента ЭДС $E = \mathcal{E}_0 d = U_{abx}$, где d – расстояние между пластинами; $U_{abx} = \varphi_{ax} - \varphi_{bx}$ – напряжение, равное разности потенциалов между выводами пластин в режиме холостого хода, т. е. при отсутствии тока в гальваническом элементе.

Если к выводам гальванического элемента подключить приемник, например резистор, то в замкнутой цепи возникнет ток. Направленное движение ионов в растворе кислоты сопровождается их взаимными столкновениями, что создает *внутреннее сопротивление* гальванического элемента постоянному току.

Таким образом, гальванический элемент, эскизное изображение которого дано на рис. 1.7, а, а изображение на принципиальных схемах – на рис. 1.7, б, можно представить схемой замещения (рис. 1.7, в), состоящей из последовательно включенных источника ЭДС E и резистивного элемента с сопротивлением $r_{вт}$, равным его внутреннему сопротивлению. Стрелка ЭДС указывает направление движения положительных зарядов внутри источника под действием сторонних сил. Стрелка напряжения U_{ab} указывает направление движения положительных зарядов в приемнике, если его подключить к источнику энергии.

Схема замещения на рис. 1.7, в справедлива для любых других источников электрической энергии постоянного тока, которые отличаются от гальванического элемента физической природой ЭДС и внутреннего сопротивления.

1.6. ИСТОЧНИК ЭДС И ИСТОЧНИК ТОКА

Рассмотрим процессы в цепи, состоящей из источника электрической энергии, подключенного к резистору с сопротивлением нагрузки r_n .

Представим источник электрической энергии схемой замещения на рис. 1.7, в, а всю цепь – схемой на рис. 1.8, а.

Свойства источника электрической энергии определяет *вольт-ампер-*

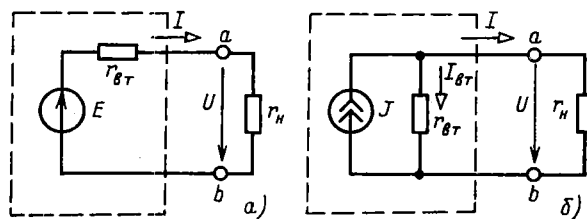


Рис. 1.8

ная характеристика или внешняя характеристика – зависимость напряжения между его выводами $U_{ab} = U$ от тока I источника, т. е. $U(I)$

$$U = E - r_{вт} I = U_x - r_{вт} I, \quad (1.2)$$

которой соответствует прямая на рис. 1.9, а. Уменьшение напряжения источника при увеличении тока объясняется увеличением падения напряжения на его внутреннем сопротивлении $r_{вт}$. При напряжении $U = 0$ ток источника равен току короткого замыкания: $I = I_K = E/r_{вт}$.

Участок внешней характеристики при отрицательных значениях тока соответствует зарядке аккумулятора.

Во многих случаях внутреннее сопротивление источника электрической энергии мало по сравнению с сопротивлением $r_{н}$ и справедливо неравенство $r_{вт} I \ll E$. В этих случаях напряжение между выводами источника электрической энергии практически не зависит от тока, т. е. $U \approx E = \text{const}$.

Источник электрической энергии с малым внутренним сопротивлением можно замкнуть идеализированной моделью, для которой $r_{вт} = 0$. Такой идеализированный источник электрической энергии называется *идеальным источником ЭДС* с одним параметром $E = U_x = U$. Напряжение между выводами идеального источника ЭДС не зависит от тока, а его внешняя характеристика определяется выражением

$$U = E = \text{const}, \quad (1.3)$$

которому соответствует прямая на рис. 1.9, б. Такой источник называется также источником напряжения. На этом же рисунке показано изображение идеального источника ЭДС на схемах.

В ряде специальных случаев, в частности в цепях с полупроводниковыми приборами и электронными лампами, внутреннее сопротивление источника электрической энергии может быть во много раз больше сопротивления нагрузки $r_{н}$ (внешней по отношению к источнику части цепи). При выполнении условия $r_{вт} \gg r_{н}$ в таких цепях ток источника электрической энергии

$$I \approx E/r_{вт} = I_K = J = \text{const},$$

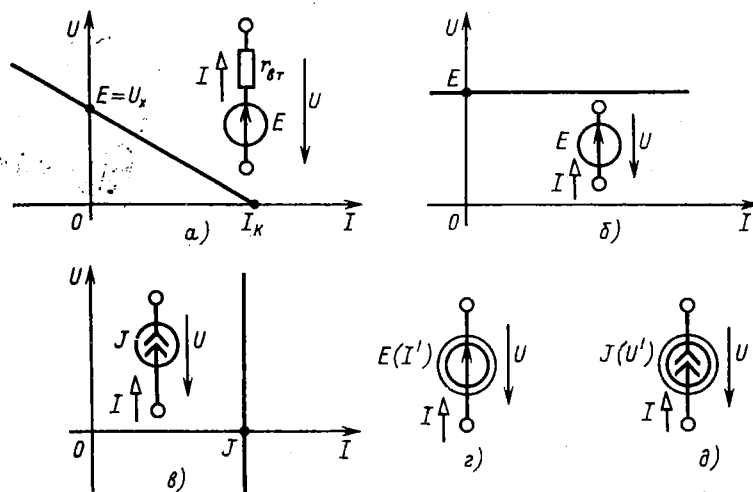


Рис. 1.9

т. е. практически равен току короткого замыкания источника. Источник электрической энергии с большим внутренним сопротивлением можно заменить идеализированной моделью, у которой $r_{вт} \rightarrow \infty$ и $E \rightarrow \infty$ и для которой справедливо равенство $E/r_{вт} = J$. Такой идеализированный источник электрической энергии называется *идеальным источником тока* с одним параметром $J = I_k$. Ток источника тока не зависит от напряжения между его выводами, а его внешняя характеристика определяется выражением

$$I = J = \text{const}, \quad (1.4)$$

которому соответствует прямая на рис. 1.9, в. На этом же рисунке дано изображение источника тока на схемах. Участок внешней характеристики с отрицательным значением напряжения соответствует потреблению источником тока энергии из внешней относительно него цепи.

От схемы замещения источника энергии на рис. 1.8, а можно перейти к эквивалентной схеме замещения с источником тока. Для этого разделим все слагаемые выражения (1.2) на внутреннее сопротивление источника $r_{вт}$:

$$U/r_{вт} = E/r_{вт} - I,$$

или

$$E/r_{вт} = J = U/r_{вт} + I = I_{вт} + I.$$

Последнее равенство можно истолковать следующим образом: ток источника тока J складывается из тока I в резистивном элементе r_n (во внешнем участке цепи) и тока $I_{вт}$ в резистивном элементе с сопротивлением $r_{вт}$, включенном между выводами a и b источника энергии (рис. 1.8, б).

Отметим, что представление реальных источников электрической энергии в виде двух схем замещения является эквивалентным представлением относительно внешнего участка цепи: в обоих случаях одинаковы напряжения между выводами источника.

Однако энергетические соотношения в двух схемах замещения не одинаковы. Не равны между собой мощности, развиваемые источником ЭДС (рис. 1.8, а) EI и источником тока (рис. 1.8, б) UI , а также мощности потерь $r_{вт} I^2 \neq r_{вт} I_{вт}^2$ (см. о мощности ниже, в § 1.15).

В теории цепей различают независимые и зависимые источники ЭДС и тока. В последнем случае источники имеют отличительное изображение на схемах, например $E(I')$ (рис. 1.9, з), $J(U')$ (рис. 1.9, д), где I' и U' — ток и напряжение какой-либо из ветвей цепи, а их параметры зависят от значений других величин.

1.7. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Два закона Кирхгофа, называемые иногда правилами Кирхгофа, — основные законы электрических цепей. Оба закона были установлены на основании многочисленных опытов.

Согласно *первому закону Кирхгофа* (закону Кирхгофа для токов) *алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (1.5)$$

где со знаком плюс записываются токи с положительными направлениями от узла, а со знаком минус — с положительными направлениями к узлу, или наоборот. Иначе: сумма токов, направленных от узла, равна сумме токов, направленных к узлу. Например, для узла цепи на рис. 1.10

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = \sum_{k=1}^5 I_k = 0$$

или

$$I_3 + I_5 = I_1 + I_2 + I_4.$$

Этот закон является следствием того, что в узлах цепи постоянного тока заряды не могут накапливаться. В противном случае изменялись бы потенциалы узлов и токи в ветвях.

Согласно второму закону Кирхгофа (закону Кирхгофа для напряжений) алгебраическая сумма напряжений участков любого контура электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^m U_k = 0, \quad (1.6)$$

где m — число участков контура.

В (1.6) со знаком плюс записываются напряжения, положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком минус — противоположно направлению, или наоборот.

В частности, для контура схемы замещения цепи, содержащего только источники ЭДС и резистивные элементы, алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС:

$$\sum_{k=1}^m U_{rk} = \sum_{k=1}^m r_k I_k = \sum_{k=1}^n E_k, \quad (1.7)$$

где m — число резистивных элементов; n — число ЭДС в контуре.

В (1.7) со знаком плюс записываются ЭДС и токи, положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком минус — противоположно направлению, или наоборот. Для контуров, содержащих источники тока, например контура 1, показанного штриховой линией на рис. 1.11, допустима запись второго закона Кирхгофа только в виде (1.6), но не в виде (1.7).

Второй закон Кирхгофа (1.6) является следствием равенства нулю циркуляции вектора напряженности электрического поля вдоль любого замкнутого контура длиной l в безвихревом поле $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$. Например, для контура 1 на рис. 1.11 по (1.6)

$$-U_1 + U_2 - U_3 = 0,$$

для контура 2 по (1.7)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 r_k I_k &= -r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_4 I_4 + r_3 I_3 = \sum_{k=1}^3 E_k = \\ &= -E_1 + E_2 + E_3. \end{aligned}$$

В частном случае в контур может входить только одна ветвь цепи, так что он замыкается вне ветвей цепи (рис. 1.12). В этом случае согласно (1.7)

$$rI - U = E,$$

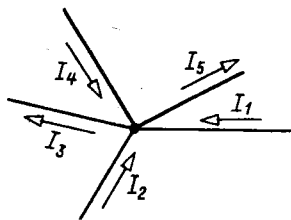


Рис. 1.10

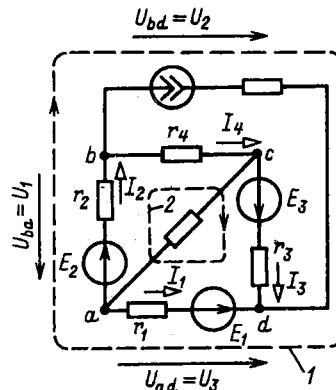
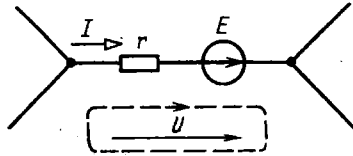


Рис. 1.11

← Рис. 1.12

откуда

$$I = (U + E)/r. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) выражает обобщенный закон Ома для любой ветви с источником ЭДС (но без источников тока) с суммарными сопротивлением r и ЭДС E или отдельного участка этой ветви с параметрами r и E .

1.8. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ОМА И ЗАКОНОВ КИРХГОФА ДЛЯ РАСЧЕТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В общем случае схема замещения цепи имеет B ветвей, из которых B_J ветвей содержат источники тока и Y узлов.

Рассмотрим сначала расчет режима в цепи без источников тока, т. е. при $B_J = 0$. Ее расчет сводится к нахождению токов в B ветвях. Для этого необходимо составить $Y - 1$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа и $K = B - Y + 1$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа. Соответствующие этим уравнениям узлы и контуры называются *независимыми*.

Число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа на единицу меньше числа узлов потому, что ток каждой ветви входит с разными знаками в уравнения для соединяемых ею узлов. Сумма слагаемых уравнений всех узлов тождественно равна нулю.

В качестве примера рассмотрим расчет цепи, схема замещения которой показана на рис. 1.13 и которая содержит $Y = 2$ узла и $B = 3$ вет-

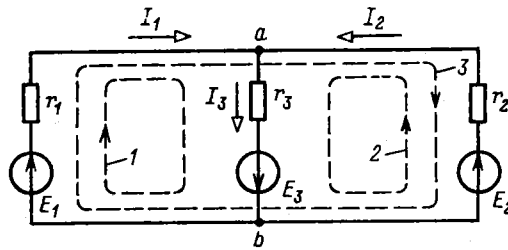


Рис. 1.13

ви, т. е. $K = B - Y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ независимых контура (1 и 2, или 1 и 3, или 2 и 3).

Произвольно выбираем положительные направления токов ветвей I_1, I_2, I_3 . По первому закону Кирхгофа можно составить одно ($Y - 1 = 3 - 2 = 1$) независимое уравнение, например для узла a

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (1.9a)$$

и по второму закону Кирхгофа — два ($K = 2$) независимых уравнения, например для контура 1 и 2

$$r_1 I_1 + r_3 I_3 = E_1 + E_3; \quad (1.9б)$$

$$r_2 I_2 + r_3 I_3 = E_2 + E_3. \quad (1.9в)$$

Решение системы трех уравнений (1.9) с тремя неизвестными токами, например методом подстановок, определяет токи ветвей I_1, I_2, I_3 .

Систему алгебраических уравнений сложной цепи, составленных на основе законов Ома и Кирхгофа, целесообразно решать численными методами на ЭВМ. Например, для схемы замещения без источника тока удобно воспользоваться матричной формой

$$AI = BE, \quad (1.10)$$

где A и B — квадратные матрицы коэффициентов при токах и ЭДС порядка $B \times B$, где B — число ветвей; I и E — матрицы-столбцы неизвестных токов и заданных ЭДС.

Элементы матрицы A и B являются коэффициентами в уравнениях (1.10) соответственно при токах и ЭДС. Отсутствие тех или иных токов и ЭДС в каких-либо уравнениях задается значениями "нуль" соответствующих элементов матриц.

Решение системы (1.10):

$$I = A^{-1}BE = GE, \quad (1.11a)$$

где

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1B} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{B1} & a_{B2} & \dots & a_{BB} \end{array} \right\|^{-1} = \\
&= \frac{1}{\Delta} \left\| \begin{array}{cccc} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1B} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{B1} & \Delta_{B2} & \dots & \Delta_{BB} \end{array} \right\|^T = \\
&= \frac{1}{\Delta} \left\| \begin{array}{cccc} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{B1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{B2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1B} & \Delta_{2B} & \dots & \Delta_{BB} \end{array} \right\| \quad (1.116)
\end{aligned}$$

— обратная матрица; Δ и Δ_{ik} — определитель матрицы A и алгебраические дополнения ее элементов a_{ik} ;

$$G = A^{-1}B = \left\| \begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1B} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{B1} & g_{B2} & g_{B3} & \dots & g_{BB} \end{array} \right\| \quad (1.11b)$$

— матрица так называемых собственных g_{ii} и взаимных g_{ik} проводимостей.

Токи ветвей:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= g_{11}E_1 + g_{12}E_2 + \dots + g_{1B}E_B; \\ I_2 &= g_{21}E_1 + g_{22}E_2 + \dots + g_{2B}E_B; \\ &\vdots \\ I_B &= g_{B1}E_1 + g_{B2}E_2 + \dots + g_{BB}E_B. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Форма записи системы уравнений (1.12) предполагает, что направления ЭДС и положительные направления токов в ветвях совпадают. Так, система уравнений (1.9) в матричной форме

$$Y - 1 \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} = A I = \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} = B E$$

или

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} &= \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{array}^{-1} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} = \\ &= \frac{1}{-(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)} \begin{array}{ccc} -r_2 r_3 & -r_1 r_3 & r_1 r_2 \\ -(r_2 + r_3) & r_3 & -r_2 \\ r_3 & - & -(r_1 + r_3) & -r_1 \end{array}^T \times \\ &\times \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} = \\ &= \frac{1}{r^2} \begin{array}{ccc} r_2 r_3 & r_2 + r_3 & -r_3 \\ r_1 r_3 & -r_3 & r_1 + r_3 \\ -r_1 r_2 & r_2 & r_1 \end{array} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} = \\ &= \frac{1}{r^2} \begin{array}{ccc} r_2 + r_3 & -r_3 & r_2 \\ -r_3 & r_1 + r_3 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_1 + r_2 \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} = \|G\| \|E\| \quad (1.13) \end{aligned}$$

определяет токи ветвей;

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= g_{11}E_1 + g_{12}E_2 + g_{13}E_3; \\ I_2 &= g_{21}E_1 + g_{22}E_2 + g_{23}E_3; \\ I_3 &= g_{31}E_1 + g_{32}E_2 + g_{33}E_3, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11} &= (r_2 + r_3)/r^2; & g_{22} &= (r_1 + r_3)/r^2; & g_{33} &= (r_1 + r_2)/r^2; \\ g_{12} &= g_{21} = -r_3/r^2; & g_{13} &= g_{31} = r_2/r^2; \\ g_{23} &= g_{32} = r_1/r^2; & r &= \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}. \end{aligned}$$

Математическое обеспечение современных ЭВМ имеет стандартные подпрограммы решения системы алгебраических уравнений в матричной форме.

При расчете схем замещения с источниками тока возможны упрощения. Действительно, токи B_j ветвей с источниками тока известны. Поэтому число независимых контуров (без источников тока!), для которых необходимо составить уравнения по второму закону Кирхгофа, равно $K = B - B_j - Y + 1$.

При помощи законов Ома и Кирхгофа можно рассчитать режим работы любой электрической цепи. Однако порядок системы уравнений может быть большим. Для упрощения вычислений применяют различные расчетные методы: контурных токов, узловых потенциалов, межзвездного напряжения, эквивалентного источника и т. д. Все эти методы основаны на законах Ома и Кирхгофа.

1.9. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМ

В ряде случаев расчет сложной электрической цепи упрощается, если в ее схеме замещения заменить группу резистивных элементов другой эквивалентной группой, в которой резистивные элементы соединены иначе. Взаимная эквивалентность заключается в том, что после замены режим работы остальной части цепи не изменится.

А. Смешанное соединение резистивных элементов. При наличии в цепи одного источника внешнюю по отношению к нему часть схемы можно в большинстве случаев рассматривать как смешанное (последовательно-параллельное) соединение резистивных элементов.

Для расчета такой цепи удобно преобразовать ее схему замещения в эквивалентную схему с последовательным соединением резистивных элементов. Например, в цепи на рис. 1.14, а между узлами a и b включены три резистивных элемента с сопротивлениями r_2 , r_3 и r_4 , т. е. проводимостями $g_2 = 1/r_2$, $g_3 = 1/r_3$, $g_4 = 1/r_4$; эквивалентная проводимость

$$g_3 = 1/r_2 + 1/r_3 + 1/r_4. \quad (1.15)$$

После замены параллельного соединения резистивных элементов эквивалентным резистивным элементом с сопротивлением $r_3 = 1/g_3$ получается эквивалентная схема с последовательным соединением двух резистивных элементов r_1 и r_3 (рис. 1.14, б).

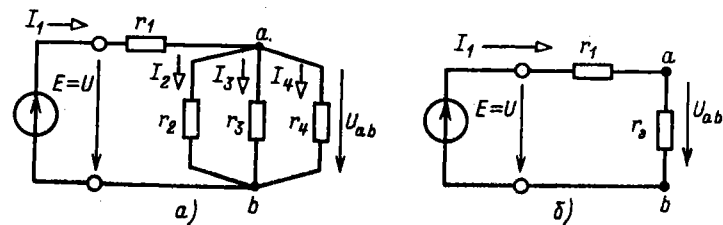


Рис. 1.14

Ток в неразветвленной части

$$I_1 = U / (r_1 + r_3),$$

и токи в параллельных ветвях

$$I_2 = U_{ab} / r_2; \quad I_3 = U_{ab} / r_3; \quad I_4 = U_{ab} / r_4, \quad (1.16)$$

где

$$U_{ab} = r_3 I_1.$$

Б. Соединение резистивных элементов по схеме звезды и треугольника. В общем случае схему замещения цепи по схеме n -лучевой звезды из резистивных элементов можно заменить эквивалентной схемой в виде n -стороннего многоугольника. Обратное преобразование возможно в ограниченном числе случаев. В частности, преобразования в обоих направлениях возможны для случая треугольника и трехлучевой звезды. Такое преобразование применяется при расчетах сложных цепей постоянного тока и цепей трехфазного тока (см. гл. 3).

Эквивалентность схем в виде треугольника и звезды (рис. 1.15) получается приравниванием значений сопротивлений или проводимостей между одноименными узлами этих схем, отсоединенных от остальной части цепи.

Найдем сопротивление между узлами A и B .

Проводимость между узлами A и B для схемы треугольника на рис. 1.15, a

$$\frac{1}{r_{AB}} + \frac{1}{r_{BC} + r_{CA}} = \frac{r_{AB} + r_{BC} + r_{CA}}{r_{AB}r_{BC} + r_{CA}r_{AB}}.$$

Сопротивление между узлами A и B — величина, обратная проводимости между этими узлами, т. е.

$$(r_{AB}r_{BC} + r_{CA}r_{AB}) / (r_{AB} + r_{BC} + r_{CA}).$$

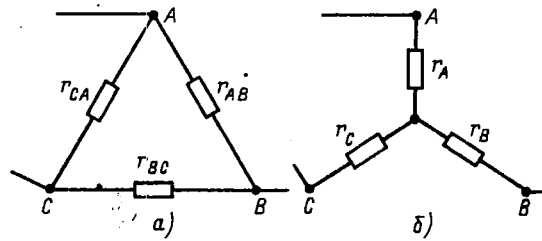


Рис. 1.15

Для схемы звезда на рис. 1.15, б сопротивление между теми же узлами A и B равно сумме сопротивлений двух ветвей: $r_A + r_B$.

Согласно условию эквивалентности должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} r_A + r_B &= \frac{r_{AB}r_{BC} + r_{CA}r_{AB}}{r_{AB} + r_{BC} + r_{CA}} = \\ &= \frac{r_{AB}r_{BC} + r_{CA}r_{AB}}{\Sigma r_{\Delta}}; \end{aligned} \quad (1.17)$$

здесь Σr_{Δ} — сумма сопротивлений всех ветвей для треугольника.

Структуры треугольника и звезды по отношению к узлам симметричны. Поэтому уравнения равенства сопротивлений между узлами B и C и между узлами C и A можно получить из (1.17) простой циклической перестановкой индексов:

$$r_B + r_C = \frac{r_{BC}r_{CA} + r_{AB}r_{BC}}{\Sigma r_{\Delta}}; \quad (1.18)$$

$$r_C + r_A = \frac{r_{CA}r_{AB} + r_{BC}r_{CA}}{\Sigma r_{\Delta}}. \quad (1.19)$$

Чтобы определить сопротивление r_A звезды, сложим (1.17) и (1.19) и вычтем из этой суммы (1.18); разделив последнее на 2, найдем

$$r_A = r_{AB}r_{CA} / \Sigma r_{\Delta}. \quad (1.20)$$

Сопротивления других ветвей звезды получим путем циклической перестановки индексов:

$$r_B = r_{BC}r_{AB} / \Sigma r_{\Delta}; \quad (1.21)$$

$$r_C = r_{CA}r_{BC} / \Sigma r_{\Delta}. \quad (1.22)$$

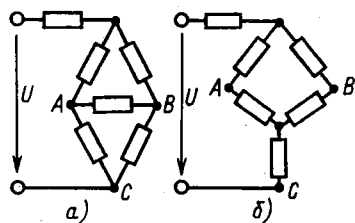


Рис. 1.16

В случае равенства сопротивлений ветвей треугольника ($r_{AB} = r_{BC} = r_{CA} = r_{\Delta}$) сопротивления ветвей эквивалентной звезды тоже одинаковы:

$$r_{\lambda} = r_{\Delta}/3. \quad (1.23)$$

Возможно обратное преобразование звезды из резистивных элементов в эквивалентный треугольник.

Для этого перемножим попарно выражения (1.20)–(1.22) и сложим полученные произведения:

$$r_A r_B + r_B r_C + r_C r_A = r_{AB} r_{BC} r_{CA} / (r_{AB} + r_{BC} + r_{CA}).$$

Последнее уравнение разделим на (1.22) и определим сопротивление ветви треугольника:

$$r_{AB} = r_A + r_B + r_A r_B / r_C. \quad (1.24)$$

Путем циклической перестановки индексов в (1.24) найдем выражения для сопротивлений двух других ветвей:

$$r_{BC} = r_B + r_C + r_B r_C / r_A; \quad (1.25)$$

$$r_{CA} = r_C + r_A + r_C r_A / r_B. \quad (1.26)$$

Примером упрощения расчетов может служить преобразование мостовой схемы соединения резистивных элементов (рис. 1.16, а). После замены одного из треугольников эквивалентной звездой всю цепь (рис. 1.16, б) можно рассматривать как смешанное соединение резистивных элементов.

1.10. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений до $U - 1$, где U — число узлов схемы замещения цепи. Метод основан на применении первого закона Кирхгофа и заключается в следующем:

- 1) один узел схемы цепи принимаем базисным с нулевым потенциалом. Такое допущение не изменяет значения токов в ветвях, так как ток в каждой ветви зависит только от разностей потенциалов узлов, а не от действительных значений потенциалов;
- 2) для остальных $U - 1$ узлов составляем уравнения по первому закону Кирхгофа, выражая токи ветвей через потенциалы узлов;
- 3) решением составленной системы уравнений определяем потен-

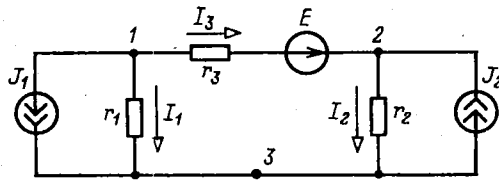


Рис. 1.17

циалы $U = 1$ узлов относительно базисного, а затем токи ветвей по обобщенному закону Ома (1.8).

Рассмотрим применение метода на примере расчета цепи по рис. 1.17, содержащей $U = 3$ узла. Узел 3 принимаем базисным, т. е. $\varphi_3 = 0$. Для узлов 1 и 2 уравнения по первому закону Кирхгофа:

узел 1

$$I_1 + I_3 + J_1 = 0;$$

узел 2

$$I_2 - I_3 - J_2 = 0,$$

где

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_3)/r_1 = \varphi_1/r_1; \quad I_2 = (\varphi_2 - \varphi_3)/r_2 = \varphi_2/r_2;$$

$$I_3 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E)/r_3,$$

т. е. после подстановки

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_1 - \frac{1}{r_3} \varphi_2 &= -J_1 - \frac{E}{r_3}; \\ -\frac{1}{r_3} \varphi_1 + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_2 &= J_2 + \frac{E}{r_3}, \end{aligned} \right\} \quad (1.27a)$$

или в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} & -\frac{1}{r_3} \\ -\frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -J_1 - \frac{E}{r_3} \\ J_2 + \frac{E}{r_3} \end{vmatrix}. \quad (1.27b)$$

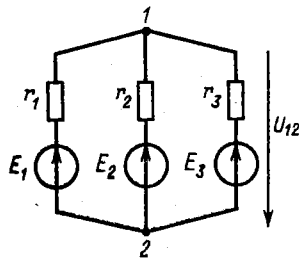


Рис. 1.18

Решение системы уравнений (1.27а) методом подстановок или (1.27б) численным методом на ЭВМ определяет потенциалы узлов φ_1 и φ_2 , а следовательно, и токи ветвей по (1.8).

Из записи (1.27) очевиден принцип составления уравнений по методу узловых потенциалов. В левой части уравнений коэффициент при потенциале рассматриваемого узла положителен и равен сумме проводимостей сходящихся к нему ветвей. Коэффициенты при потенциалах узлов, соединенных ветвями с рассматриваемым узлом, отрицательны и равны проводимостям соответствующих ветвей.

Правая часть уравнений содержит алгебраическую сумму токов ветвей с источниками токов и токов короткого замыкания ветвей с источниками ЭДС, сходящихся к рассматриваемому узлу, причем слагаемые берутся со знаком плюс (минус), если ток источника тока и ЭДС направлены к рассматриваемому узлу (от узла).

В частном случае схемы замещения без источников тока с двумя узлами потенциал узла 1 при базисном узле 2, т. е. при $\varphi_2 = 0$, равен напряжению между узлами

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sum E/r}{\sum 1/r} \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) называется *формулой межузлового напряжения*. Например, для цепи на схеме рис. 1.18 напряжение между узлами по (1.28)

$$U_{12} = \frac{E_1/r_1 + E_2/r_2 + E_3/r_3}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3}.$$

1.11. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений до $K = B - B_J - Y + 1$ и основан на применении второго закона Кирхгофа.

Рассмотрим сущность метода сначала для расчета схемы цепи без источников тока, т. е. при $B_J = 0$:

1) выбираем $K = B - Y + 1$ независимых контуров и положительных направлений так называемых контурных токов, каждый из которых протекает по всем элементам соответствующего контура.

Для планарных схем, т. е. допускающих изображение на плоскости без пересечения ветвей, достаточным условием выделения K незави-

симых контуров является наличие в каждом из них хотя бы одной ветви, принадлежащей только этому контуру;

2) для K независимых контуров составляем уравнения по второму закону Кирхгофа, совместное решение которых определяет все контурные токи;

3) ток каждой ветви определяем по первому закону Кирхгофа как алгебраическую сумму контурных токов в соответствующей ветви.

В качестве примера рассмотрим расчет цепи на рис. 1.19, а с числом ветвей $B = 6$, узлов $Y = 4$, независимых контуров $K = B - Y + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$. Выберем независимые контуры 1-3 и положительные направления контурных токов в них I_{11} , I_{22} и I_{33} (рис. 1.19, б). В отличие от токов ветвей каждый контурный ток обозначим двойным индексом номера контура. Уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\left. \begin{array}{l} \text{контур 1} \\ (r_1 + r_4 + r_6)I_{11} - r_6I_{22} + r_4I_{33} = E_1 - E_4; \\ \text{контур 2} \\ -r_6I_{11} + (r_2 + r_5 + r_6)I_{22} + r_5I_{33} = E_2; \\ \text{контур 3} \\ r_4I_{11} + r_5I_{22} + (r_3 + r_4 + r_5)I_{33} = E_3 - E_4, \end{array} \right\} \quad (1.29a)$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc} r_1 + r_4 + r_6 & -r_6 & r_4 \\ -r_6 & r_2 + r_5 + r_6 & r_5 \\ r_4 & r_5 & r_3 + r_4 + r_5 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{array} \right\| = \\ & = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} E_1 - E_4 \\ E_2 \\ E_3 - E_4 \end{array} \right\| \quad (1.29б) \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.29а) методом подстановок или (1.29б) численными методами на ЭВМ определяет контурные токи I_{11} , I_{22} , I_{33} . Токи ветвей (рис. 1.19) находим по первому закону Кирхгофа: $I_1 = I_{11}$, $I_2 = I_{22}$, $I_3 = I_{33}$, $I_4 = -I_{11} - I_{33}$, $I_5 = I_{22} + I_{33}$, $I_6 = I_{11} - I_{22}$.

Из (1.29) очевиден принцип составления уравнений по методу контурных токов. В левой части уравнений коэффициент при контурном токе рассматриваемого контура положителен и равен сумме сопротив-

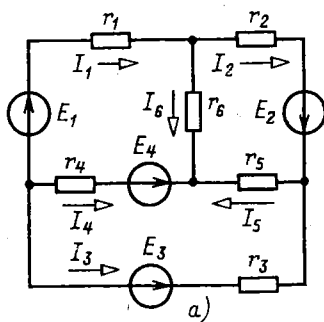


Рис. 1.19

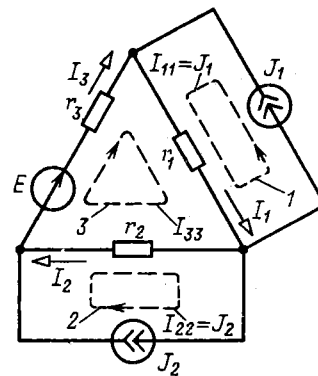
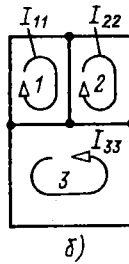


Рис. 1.20

лений его ветвей. Коэффициенты при контурных токах в контурах, имеющих общие ветви с рассматриваемым контуром, равны сумме сопротивлений общих ветвей со знаком плюс (минус), если направления контурных токов в общих ветвях совпадают (противоположны).

Первая часть уравнений содержит алгебраическую сумму ЭДС ветвей рассматриваемого контура, причем слагаемое записывается со знаком плюс (минус), если направления ЭДС и положительное направление контурного тока совпадают (противоположны).

При расчете схемы замещения с источниками тока возможны упрощения. Контурный ток, выбранный так, что других контурных токов в ветви с источником тока нет, известен. Поэтому в схеме с B ветвями, B_J из которых содержат источники тока, число независимых контуров без источников тока и соответствующих им неизвестных контурных токов равно $K = B - B_J - Y + 1$.

Например, в цепи на схеме рис. 1.20 число ветвей $B = 5$, ветвей с источниками тока $B_J = 2$, узлов $Y = 3$, независимых контуров без источников тока $K = B - B_J - Y + 1 = 5 - 2 - 3 + 1 = 1$ (контур 3). Уравнение по второму закону Кирхгофа для контура 3 при выбранных положительных направлениях контурных токов:

$$r_1 I_{11} - r_2 I_{22} + (r_1 + r_2 + r_3) I_{33} = E,$$

т. е.

$$I_{33} = \frac{E - r_1 I_{11} + r_2 I_{22}}{r_1 + r_2 + r_3},$$

где $I_{11} = J_1$, $I_{22} = J_2$ — известные токи контуров 1 и 2.

Токи ветвей: $I_1 = I_{11} + I_{33}$; $I_2 = I_{33} - I_{22}$; $I_3 = I_{33}$.

1.12. ПРИНЦИП И МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ (СУПЕРПОЗИЦИИ)

Для линейных электрических цепей справедлив принцип наложения: ток в любой ветви равен алгебраической сумме токов в этой ветви (частичных токов) при действии каждого источника в отдельности, если остальные источники заменяются резисторами с сопротивлениями, равными внутренним сопротивлениям соответствующих источников*.

На основе принципа наложения для расчетов линейных цепей применяется *метод наложения* (суперпозиции).

В схеме замещения с B ветвями ток каждой k -й ветви равен алгебраической сумме частичных токов от действия каждой из ЭДС E_i ветви i и каждого источника тока J_j ветви j .

Для схемы без источников тока метод наложения определяется системой (1.12):

$$I_k = g_{k1}E_1 + g_{k2}E_2 + \dots + g_{kk}E_k + \dots + g_{ki}E_i + \dots + g_{kB}E_B, \quad (1.30)$$

где $g_{kk} = I_k^{(E_k)} / E_k$ — собственная проводимость ветви k , равная отношению частичного тока ветви к ЭДС источника этой ветви при условии, что ЭДС остальных источников равны нулю; $g_{ki} = I_k^{(E_i)} / E_i$ — взаимная проводимость ветвей k и i , равная отношению частичного тока ветви k к ЭДС источника ветви i при условии, что ЭДС остальных источников равны нулю.

Собственная проводимость ветви имеет положительное значение, так как по договоренности (см. § 1.8) положительное направление ее тока и ЭДС источника выбираются одинаковыми. Взаимная проводимость двух ветвей может иметь положительное и отрицательное значения, причем (1.13)

$$g_{ki} = g_{ik}, \quad (1.31)$$

что означает выполнение принципа взаимности.

Взаимная проводимость отрицательная, если при выбранном положительном направлении частичного тока в ветви k его численное значение получается отрицательным (действительное направление частичного тока противоположно положительному).

Принцип взаимности выполняется для всех линейных цепей с независимыми источниками. Но он в общем случае не справедлив для ли-

* В механике принцип наложения именуется принципом независимого действия сил, согласно которому движение тела под действием нескольких сил можно рассматривать как результат сложения движений, вызываемых каждой силой в отдельности.

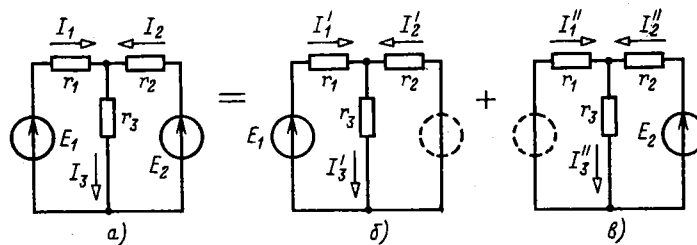


Рис. 1.21

нейной цепи с зависимыми источниками, например для схемы замещения усилителя в режиме малого сигнала.

В качестве примера рассмотрим расчет методом наложения цепи на рис. 1.21, а. Токи ветвей равны сумме частных токов в схемах на рис. 1.21, б и в:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = g_{11}E_1 + g_{12}E_2 = \frac{r_1 + r_3}{r^2} E_1 - \frac{r_3}{r^2} E_2;$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = g_{21}E_1 + g_{22}E_2 = -\frac{r_3}{r^2} E_1 + \frac{r_1 + r_3}{r^2} E_2;$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = g_{31}E_1 + g_{32}E_2 = \frac{r_2}{r^2} E_1 + \frac{r_1}{r^2} E_2,$$

где собственные проводимости ветвей g_{11} и g_{22} имеют положительные значения, взаимные проводимости ветвей $g_{12} = g_{21}$ — отрицательные значения, а g_{31} и g_{32} — положительные значения (1.14) и обозначено $r = \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$.

В схемах замещения с источниками тока частные токи ветвей определяются от каждого из них при исключении остальных источников тока в результате разрыва содержащих их ветвей.

1.13. ПРИНЦИП КОМПЕНСАЦИИ

Различают принципы компенсации напряжения и компенсации тока.

Принцип компенсации напряжения заключается в том, что участок $a - b$ схемы с напряжением U_{ab} можно заменить эквивалентным источником ЭДС $E = U_{ab}$, направление действия которого противоположно положительному направлению напряжения U_{ab} . Доказательство принципа следует из второго закона Кирхгофа (1.6), в котором любое сложное суммы напряжений участков можно перенести с противополож-

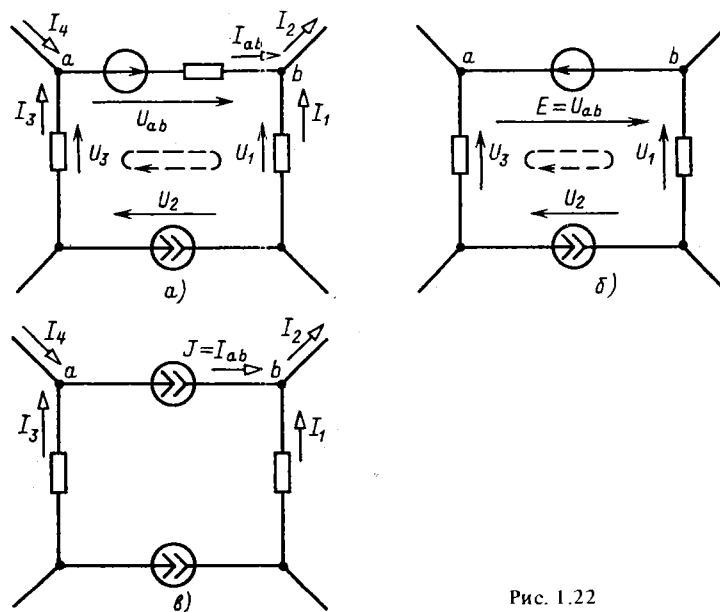


Рис. 1.22

ным знаком в правую часть уравнения, что эквивалентно замене соответствующего участка источником ЭДС. Например, уравнения контуров цепи на рис. 1.22, а

$$U_{ab} - U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

и на рис. 1.22, б

$$-U_1 + U_2 + U_3 = -E$$

эквивалентны, если $E = U_{ab}$.

Принцип компенсации тока заключается в том, что участок $a - b$ схемы с током I_{ab} можно заменить эквивалентным источником тока $J = I_{ab}$, направление которого совпадает с положительным направлением тока I_{ab} . Действительно, уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов a и b цепей на рис. 1.22, а и в будут одинаковы, если в последней ветвь $a - b$ заменена источником тока $J = I_{ab}$.

1.14. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИСТОЧНИКА (АКТИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА)

Двухполусником называется цепь, которая соединяется с внешней относительно нее частью цепи через два вывода — полюса. Различают активные и пассивные двухполусники. *Активный* двухполусник со-

держит источники электрической энергии, а *пассивный* двухполюсник их не содержит. Условные обозначения активного A и пассивного Π двухполюсников приведены на рис. 1.23. Для расчета цепей с двухполюсниками последние представляют схемами замещения.

Схема замещения линейного двухполюсника определяется его линейной вольт-амперной или внешней характеристикой $U(I)$.

Вольт-амперная характеристика пассивного двухполюсника — прямая a на рис. 1.6. Поэтому его схема замещения представляется резистивным элементом с сопротивлением

$$r_{вх} = U/I,$$

где U , I и $r_{вх}$ — напряжение между выводами, ток и входное сопротивление пассивного двухполюсника.

Вольт-амперную характеристику активного двухполюсника (рис. 1.24, a) можно построить по двум точкам, соответствующим режимам холостого хода, т. е. при $r_H = \infty$, $U = U_x$, $I = 0$, и короткого замыкания, т. е. при $r_H = 0$, $U = 0$, $I = I_K$. Эта характеристика и ее уравнение

$$U = U_x - r_{эк} I, \quad (1.32)$$

где

$$r_{эк} = r_{вых} = U_x / I_K \quad (1.33)$$

— эквивалентное или выходное сопротивление двухполюсника, совпадают с одноименными характеристикой и уравнением (1.2) источника

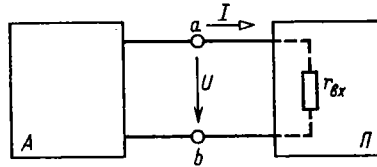


Рис. 1.23

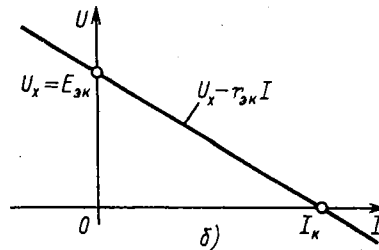
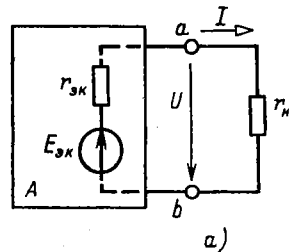


Рис. 1.24

электрической энергии, представляемого схемами замещения на рис. 1.8. Итак, активный двухполюсник представляется эквивалентным источником с ЭДС $E_{\text{эк}} = U_x$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{эк}} = r_{\text{вых}}$ (рис. 1.24, а). Как следует из сравнения рис. 1.24, а с рис. 1.8, а, гальванический элемент — это пример активного двухполюсника.

При изменении тока в пределах $0 \leq I \leq I_K$ активный двухполюсник отдает энергию во внешнюю цепь. При токе $I < 0$, т. е. действительном направлении тока, обратном показанному на рис. 1.24, а, получает энергию из внешней цепи. Это возможно, если к выводам $a - b$ двухполюсника присоединен не резистор с сопротивлением нагрузки r_H , а участок внешней цепи, содержащий необходимые источники энергии.

Если приемник с сопротивлением нагрузки r_H подключен к активному двухполюснику, то его ток определяется по методу эквивалентного источника:

$$I = \frac{E_{\text{эк}}}{r_H + r_{\text{эк}}} = \frac{U_x}{r_H + r_{\text{вых}}}, \quad (1.34)$$

что следует из второго закона Кирхгофа.

В качестве примера рассмотрим расчет тока I в цепи на рис. 1.25, а методом эквивалентного источника. Для расчета напряжения холостого хода U_x между выводами a и b активного двухполюсника разомкнем ветвь с резистивным элементом r_H (рис. 1.25, б). Применяя метод наложения и учитывая симметрию схемы, находим

$$U_x = rJ/2 + E/2.$$

Заменив источники электрической энергии (в этом примере источники ЭДС и тока) активного двухполюсника резистивными элементами с сопротивлениями, равными внутренним сопротивлениям соответствующих источников (в этом примере нулевым для источника ЭДС и бесконечно большим для источника тока сопротивлениями), полу-

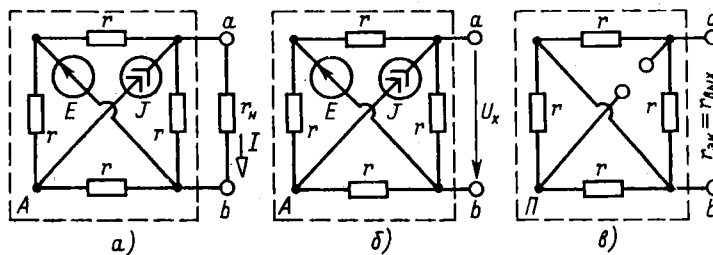


Рис. 1.25

чим выходное сопротивление (сопротивление, измеренное на выводах a и b) $r_{\text{вых}} = r/2$ (рис. 1.25, в). По (1.34) искомый ток

$$I = \frac{rJ/2 + E/2}{r_{\text{II}} + r/2}.$$

1.15. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении положительного заряда Q вдоль неразветвленного участка $a - b$ электрической цепи, не содержащего источников электрической энергии, равна произведению этого заряда на напряжение $U_{ab} = U$ между концами участка: $A = QU$. При равномерном движении заряда в течение времени t , т. е. при постоянном токе $I_{ab} = I$, заряд

$$Q = It$$

и работа

$$A = UIt.$$

Для оценки энергетических условий важно знать, сколь быстро совершается работа, т. е. определить *мощность*

$$P = UI. \quad (1.35)$$

Основная единица работы в системе СИ — *джоуль* (Дж), мощности — *ватт* (Вт).

Практической единицей измерения электрической энергии служит *киловатт-час* (кВт · ч), т. е. работа, совершаемая при неизменной мощности 1 кВт в течение 1 ч. Так как 1 Вт · с = 1 Дж, то 1 кВт · ч = 3 600 000 Дж.

Для резистивных элементов выражение (1.35) можно преобразовать, воспользовавшись законом Ома $U = rI$:

$$P_r = UI = rI^2 = gU^2. \quad (1.36)$$

Для источника ЭДС, направление которой совпадает с направлением тока (рис. 1.26, а), мощность сторонних сил $P_E = U_{ab}I = EI$. Если направления ЭДС и тока противоположны, то мощность $P_E = -U_{ab}I = -EI$ (рис. 1.26, б) (например, при зарядке аккумулятора). Аналогично мощность источника тока $P_J = U_{ab}I = U_{ab}J$, если направления тока внутри источника $J = I$ и напряжения между его выводами U_{ab} противоположны (рис. 1.26, в). В противном случае мощность $P_J = -U_{ab}I = -U_{ab}J$ (рис. 1.26, г), т. е. источник получает энергию из внешней цепи.

Заметим, что идеальные источники ЭДС и тока могут развивать бесконечно большую мощность. Действительно, подключим к каждому

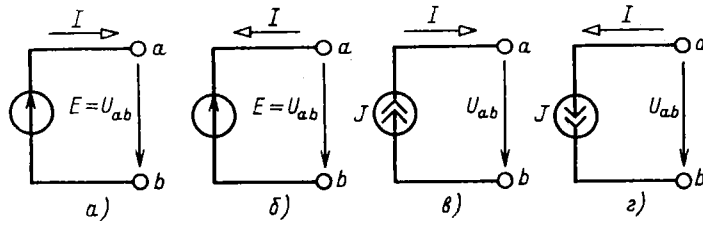


Рис. 1.26

источнику приемник с сопротивлением нагрузки r_n . В первом случае, если $r_n \rightarrow 0$, ток $I \rightarrow \infty$ и, следовательно, мощность $P_E = EI \rightarrow \infty$, а во втором случае, если $r_n \rightarrow \infty$, напряжение $U \rightarrow \infty$ и мощность $P_J = UI \rightarrow \infty$.

В любой электрической цепи должен соблюдаться энергетический баланс — баланс мощностей: *алгебраическая сумма мощностей всех источников энергии (в частности, источников тока и источников ЭДС) равна арифметической сумме мощностей всех приемников энергии (в частности, резистивных элементов)*:

$$\sum U_{\text{ист}} I_{\text{ист}} = \sum r I_r^2 \quad \text{или} \quad \sum P_{\text{ист}} = \sum P_r. \quad (1.37)$$

В качестве примера составим баланс цепи на рис. 1.19:

$$\begin{aligned} E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 = \\ = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 + r_4 I_4^2 + r_5 I_5^2 + r_6 I_6^2. \end{aligned}$$

1.16. УСЛОВИЕ ПЕРЕДАЧИ ПРИЕМНИКУ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

В устройствах связи, в электронике, автоматике и т. д. часто желательно передать от источника к приемнику (исполнительному механизму) наибольшую энергию, причем КПД передачи имеет второстепенное значение в силу малости энергии. Рассмотрим общий случай питания приемника с сопротивлением r_n от активного двухполюсника. На рис. 1.27 последний представлен эквивалентным источником с ЭДС $E_{\text{эк}}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{эк}}$ (см. § 1.14). Найдем мощности приемника

$$P_n = r_n I^2 = r_n E_{\text{эк}}^2 / (r_n + r_{\text{эк}})^2 = U_n I = (E_{\text{эк}} - r_{\text{эк}} I) I,$$

источника ЭДС $E_{\text{эк}}$

$$P_E = E_{\text{эк}} I = (r_n + r_{\text{эк}}) I^2$$

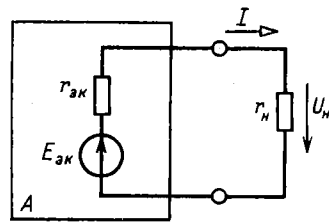


Рис. 1.27

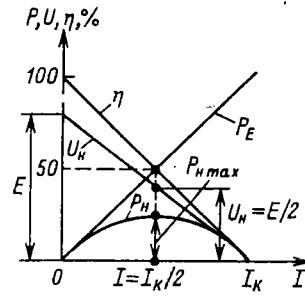


Рис. 1.28

и КПД передачи энергии

$$\eta = \frac{P_H}{P_E} 100\% = \frac{r_H}{r_H + r_{ЭК}} 100\% = \left(1 - \frac{r_{ЭК} I}{E_{ЭК}}\right) \cdot 100\%.$$

При двух предельных значениях сопротивления $r_H = 0$ и $r_H = \infty$ мощность приемника равна нулю, так как в первом случае равно нулю напряжение между выводами приемника, а во втором случае — ток в цепи. Следовательно, некоторому определенному значению r_H соответствует наибольшее возможное (при данных $E_{ЭК}$ и $r_{ЭК}$) значение мощности приемника. Чтобы определить это значение сопротивления, приравняем нулю первую производную от мощности P_H по r_H :

$$\frac{dP_H}{dr_H} = E_{ЭК}^2 [(r_{ЭК} + r_H)^2 - r_H (2r_{ЭК} + 2r_H)] / (r_{ЭК} + r_H)^4 = 0.$$

Так как знаменатель этого выражения не равен бесконечности, то

$$(r_{ЭК} + r_H)^2 - 2r_H r_{ЭК} - 2r_H^2 = 0,$$

откуда следует, что при условии

$$r_H = r_{ЭК} \quad (1.38)$$

мощность приемника будет максимальна:

$$P_{Hmax} = r_H (E_{ЭК}/2r_H)^2 = E_{ЭК}^2 / 4r_H.$$

Равенство (1.38) называется *условием максимальной мощности* приемника, т. е. передачи максимальной энергии.

На рис. 1.28 приведены зависимости U_H , P_H , P_E и η от тока I .

Если приемник с сопротивлением нагрузки r_H подключен к источнику с внутренним сопротивлением $r_{вТ}$ (см. рис. 1.8), то его мощность будет максимальна при

$$r_H = r_{вТ}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2.1. ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Электротехнические устройства синусоидального (переменного) тока находят широкое применение в различных областях народного хозяйства, при генерировании, передаче и трансформировании электрической энергии, в электроприводе, бытовой технике, промышленной электронике, радиотехнике и т. д. Преимущественное распространение электротехнических устройств синусоидального тока обусловлено рядом причин.

Современная энергетика основана на передаче энергии на дальние расстояния при помощи электрического тока. Обязательным условием такой передачи является возможность применения простого и с малыми потерями энергии преобразования тока. Такое преобразование осуществимо лишь в электротехнических устройствах переменного тока — трансформаторах. Вследствие громадных преимуществ трансформирования в современной электроэнергетике и применяется прежде всего синусоидальный ток. Исключение составляют лишь линии передачи постоянного тока сверхвысокого напряжения и некоторые технические установки, но и они входят составной частью в систему цепей синусоидального тока.

Большим стимулом для разработки и развития электротехнических устройств синусоидального тока является возможность получения источников электрической энергии большой мощности. У современных турбогенераторов тепловых электростанций мощность равна 100—1500 МВт на один агрегат. Большие мощности имеют и генераторы гидроэлектростанций.

К наиболее простым и дешевым электрическим двигателям относятся асинхронные двигатели синусоидального тока, в которых отсутствуют движущиеся электрические контакты.

Для электроэнергетических установок (в частности, для всех электрических станций) в СССР и в большинстве стран мира принята стандартная частота 50 Гц (в США — 60 Гц). Причина такого выбора проста: понижение частоты нежелательно, так как уже при частоте тока 40 Гц лампы накаливания заметно для глаза мигают; повышение частоты нежелательно, так как пропорционально частоте растет ЭДС самоиндукции, отрицательно влияющая на передачу энергии по проводам и работу многих электротехнических устройств.

Эти соображения, однако, не ограничивают применение синусоидального тока других частот для решения различных технических и научных задач. Например, частота синусоидального тока электрических печей для

выплавки тугоплавких и особо чистых металлов составляет 500 Гц — 50 кГц, а в электроакустических установках частота синусоидального тока может составлять несколько герц.

Развитие радиотехники привело к созданию специфических высокочастотных (мегагерцы) устройств: антенн, генераторов, преобразователей и т. д. Многие из этих устройств основаны на свойстве переменного тока генерировать переменное электромагнитное поле, при помощи которого можно осуществить направленную передачу энергии без проводов.

В дальнейшем ограничимся изучением главным образом электротехнических устройств синусоидального тока промышленной частоты и методов анализа режимов их работы.

2.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Электрическая цепь синусоидального тока содержит кроме электротехнических устройств, назначение которых совпадает с назначением функционально аналогичных устройств цепи постоянного тока (источники энергии, измерительные приборы, коммутационные аппараты и т. д.), также устройства, присущие только цепям синусоидального тока: трансформаторы, конденсаторы, катушки индуктивности и др.

Всю совокупность электротехнических устройств в цепи синусоидального тока для наглядного и компактного отображения связей между ними можно представить принципиальной схемой, аналогичной приведенной на рис. 1.2.

Для расчета режима работы электротехнических устройств необходимо перейти от принципиальной схемы цепи к ее схеме замещения.

Элементами схем замещения цепей синусоидального тока являются источники синусоидальных тока и ЭДС, резистивные, индуктивные и емкостные элементы. Понятия об источниках тока и ЭДС, а также резистивных элементах уже были рассмотрены при анализе цепей постоянного тока. Индуктивные и емкостные элементы являются специфическими элементами цепей синусоидального тока.

Если параметры элементов не зависят от тока и приложенного к ним напряжения, то это линейные элементы. В противном случае элементы следует считать нелинейными.

Напряжения и токи в электрических цепях синусоидального тока и в их схемах замещения, соответствующие различным моментам времени, а также в других электрических цепях, в которых токи и напряжения зависят от времени, называются *мгновенными значениями* и обозначаются строчными буквами *i* и *u*.

2.3. ИНДУКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Вокруг всякого провода с током i существует магнитное поле. В электротехнических устройствах синусоидального тока, например в трансформаторах, электрических двигателях, катушках измерительных приборов и т. д., необходимо создавать сильные магнитные поля.

Свойства изменяющегося магнитного поля таких устройств рассмотрим на примере катушек индуктивности с различным направлением намотки и не будем учитывать сопротивление проводов обмотки. Если ток $i_{ab} = i_L$ в катушке постоянный, то в окружающем витки пространстве постоянно и магнитное поле, которое можно характеризовать *магнитным потоком* Φ — совокупностью непрерывных магнитных линий, т. е. линий вектора индукции $\mathbf{B}$ через поверхность, ограниченную замкнутым контуром. Направление магнитных линий зависит от направления намотки витков и направления тока. Внутри катушки оно совпадает с направлением поступательного движения буравчика, если его рукоятку вращать в направлении тока (рис. 2.1, а и б, где магнитные линии — только по две в катушке — изображены штриховыми линиями). В общем случае конфигурация магнитного поля вокруг витков имеет сложную форму. Но для характеристики катушки индуктивности как элемента электрической цепи часто не требуется знать распределение магнитного поля внутри катушки и в окружающем катушку пространстве. Достаточно вычислить *потокосцепление* Ψ магнитного потока со всеми w витками:

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_k + \dots + \Phi_w = \sum_{k=1}^w \Phi_k,$$

где Φ_k — магнитный поток, сцепленный с k -м витком.

Так как в рассматриваемом случае потокосцепление с витками катушки зависит от тока в этой катушке, оно называется *собственным потокосцеплением*.

Отношение собственного потокосцепления катушки к току $i_{ab} = i_L$ катушки называется *собственной индуктивностью*, или, короче,

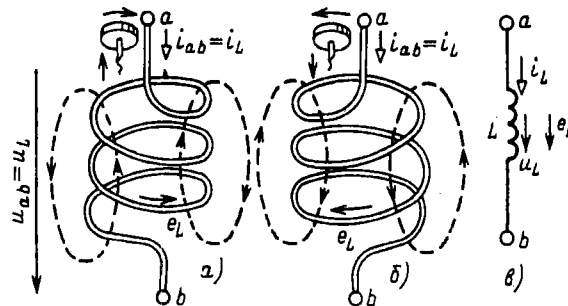


Рис. 2.1

индуктивностью:

$$L = \Psi / i_L. \quad (2.1)$$

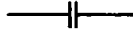
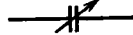
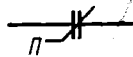
Если собственное потокоцепление пропорционально току, то индуктивность $L = \text{const}$. В противном случае индуктивность зависит от тока $L(i_L)$. Зависимость индуктивности от тока проявляется, например, у катушек индуктивности с магнитопроводом (сердечником) из ферромагнитного материала.

Условные графические изображения катушек индуктивности приведены в табл. 2.1.

Если значение тока в витках катушки изменяется (увеличивается или уменьшается), то изменяется и собственное потокоцепление. При изменении потокоцепления в витках катушки согласно *закону электромагнитной индукции* наводится ЭДС самоиндукции e_L . Положительное направление ЭДС самоиндукции чаще выбирают совпадающим с направлением вращения рукоятки буравчика, ввинчивающегося по направлению магнитных линий, и с выбранным положительным направлением тока (рис. 2.1, а и б). Эта ЭДС по определению равна

$$e_L = -d\Psi/dt, \quad (2.2a)$$

Таблица 2.1. Условные графические изображения катушек индуктивности и конденсаторов

Наименование	Условное изображение
Катушка индуктивности (реактор):	
без магнитопровода	
с магнитопроводом	
саморегулирующаяся нелинейно, например в зависимости от параметра Π	
Конденсатор:	
постоянной емкости	
электролитический	
переменной емкости	
саморегулирующийся нелинейно, например в зависимости от параметра Π	

или с учетом (2.1)

$$e_L = -L di_L/dt. \quad (2.26)$$

Из (2.2) следует, что действительное направление ЭДС самоиндукции в данный момент времени может отличаться от выбранного положительного направления и определяется знаком производной тока по времени.

Нетрудно видеть, что ЭДС самоиндукции всегда препятствует изменению тока (правило Ленца).

Для того чтобы в катушке индуктивности без потерь был переменный ток, между ее выводами должно быть напряжение, равное по абсолютному значению и в каждый момент времени противоположное по направлению ЭДС самоиндукции (рис. 2.1, в):

$$u_{ab} = u_L = -e_L = L di_L/dt = d\Psi/dt. \quad (2.3)$$

Основная единица потокосцепления и магнитного потока в системе СИ — *вебер* (Вб), $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$; индуктивности — *генри* (Гн), $1 \text{ Гн} = \text{Вб}/\text{А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}/\text{А}$.

Так как электрическому току всегда сопутствует магнитное поле, параметром каждой части электротехнического устройства с током должна быть индуктивность.

Линейный индуктивный элемент является составляющей схемы замещения любой части электротехнического устройства, в которой собственное потокосцепление пропорционально току. Его параметром служит индуктивность $L = \text{const}$.

Если зависимость собственного потокосцепления от тока нелинейна, то и схема замещения содержит *нелинейный индуктивный элемент*, который задается нелинейной *вебер-амперной характеристикой* $\Psi(i_L)$.

На рис. 2.2 приведены вебер-амперные характеристики линейного (прямая *а*) и нелинейного (кривая *б*) индуктивных элементов, а также условные обозначения таких элементов в схемах замещения.

Если за время t_1 ток в индуктивном элементе изменится от нуля до i_{L1} , то в магнитном поле элемента (рис. 2.1, в) будет запасена энергия

$$W_M = \int_0^{t_1} i_L u_L dt,$$

или с учетом (2.3)

$$W_M = \int_0^{\Psi_1} i_L d\Psi = \int_0^{i_{L1}} i_L L(i_L) di_L, \quad (2.4)$$

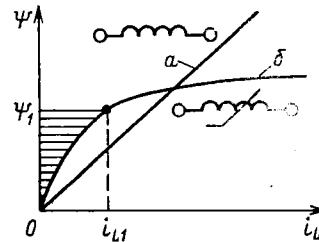


Рис. 2.2

где Ψ_L — значение собственного потокосцепления при токе $i_L = i_{L1}$ (рис. 2.2).

Как следует из (2.4), энергия, запасенная в магнитном поле индуктивного элемента при токе i_L , пропорциональна площади, заключенной между вебер-амперной характеристикой и осью ординат (рис. 2.2, где заштрихована площадь, пропорциональная энергии магнитного поля нелинейного индуктивного элемента при токе i_{L1}).

Из (2.4) с учетом (2.1) следует, что энергия магнитного поля линейного индуктивного элемента при токе i_L

$$W_M = Li_L^2/2 = \Psi i_L/2. \quad (2.5)$$

При увеличении (уменьшении) тока энергия магнитного поля индуктивных элементов увеличивается (уменьшается). Следовательно, индуктивные элементы можно рассматривать как аккумуляторы энергии.

2.4. ЕМКОСТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Между различными частями электротехнических устройств существует электрическое поле электрических зарядов, находящихся на этих частях устройств. В некоторых электрических устройствах, например в изоляторах, конденсаторах и т. д., возникают достаточно сильные электрические поля.

На рис. 2.3, а изображен простейший плоский конденсатор с двумя параллельными обкладками площадью S , которые находятся в вакууме на расстоянии d друг от друга. Если между верхней и нижней обкладками конденсатора приложить напряжение $u_{ab} > 0$, то на верхней и нижней обкладках конденсатора накопятся одинаковые положительные и отрицательные заряды $\pm q$, которые называют свободными.

Между обкладками плоского конденсатора электрическое поле будет однородным (если не учитывать краевого эффекта) с напряженностью

$$E = u_{ab}/d = q/\epsilon_0 S, \quad (2.6)$$

где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

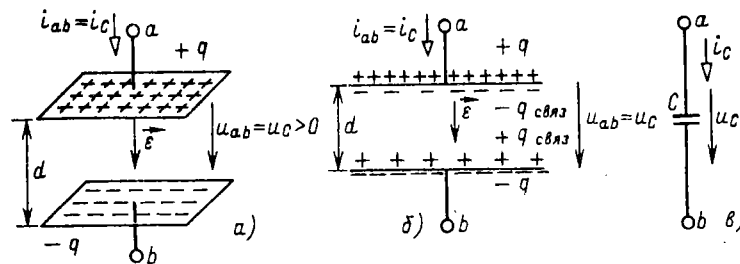


Рис. 2.3

Накопленный (в конденсаторе) заряд q пропорционален приложенному напряжению $u_{ab} = u_C$:

$$q = Cu_{ab} = Cu_C, \quad (2.7)$$

коэффициент пропорциональности C называется *емкостью конденсатора*.

Решив совместно соотношения (2.6) и (2.7), получим выражение для емкости плоского вакуумного конденсатора:

$$C = \epsilon_0 S/d.$$

Для увеличения емкости плоского конденсатора пространство между обкладками заполняется каким-либо диэлектриком (рис. 2.3, б).

Под действием электрического поля хаотически ориентированные в пространстве дипольные молекулы диэлектрика приобретают преимущественное направление ориентации. При этом внутри однородного диэлектрика положительные и отрицательные заряды дипольных молекул компенсируют друг друга, а на границах с обкладками плоского конденсатора остаются нескомпенсированные слои *связанных зарядов* $q_{\text{связ}}$. На границе с обкладкой, заряженной положительно, располагается слой отрицательных связанных зарядов, а на границе с обкладкой, заряженной отрицательно, — слой положительных связанных зарядов. Наличие связанных зарядов уменьшает напряженность $\mathcal{E}$ электрического поля внутри конденсатора:

$$\mathcal{E} = u_{ab}/d = (q - q_{\text{связ}})/(\epsilon_0 S).$$

Отсюда следует, что при той же напряженности электрического поля, а следовательно, и напряжении $u_{ab} = u_C$, заряд q должен быть больше. Поэтому увеличится, как следует из (2.7), и емкость плоского конденсатора по сравнению с емкостью такого же вакуумного конденсатора:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 S/d, \quad (2.8)$$

где ϵ_r — *относительная диэлектрическая проницаемость* заполняющего конденсатор диэлектрика (безразмерная величина).

Произведение относительной диэлектрической проницаемости ϵ_r на электрическую постоянную ϵ_0 называется *абсолютной диэлектрической проницаемостью*:

$$\epsilon_a = \epsilon_r \epsilon_0. \quad (2.9)$$

В табл. 2.2 приведены параметры некоторых диэлектриков, а в табл. 2.1 — условные графические изображения конденсаторов.

Основная единица емкости в системе СИ — *фарад* (Ф), $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В} = 1 \text{ А} \cdot \text{с/В}$.

Таблица 2.2. Диэлектрическая проницаемость (относительная), электрическая прочность и удельное объемное сопротивление некоторых материалов

Вещество	ϵ_r	E_n , МВ/м*	ρ_V , Ом·м
Трансформаторное масло	2,1–2,4	15–20	$10^{12}–10^{13}$
Совол	4,8–5	14–18	$10^{11}–10^{13}$
Вазелин	2,2–2,6	20–25	$5 \cdot 10^{12}–10^{13}$
Полиэтилен	2,2–2,4	35–60	$10^{13}–10^{15}$
Лавсан	3–3,5	80–120	$10^{14}–10^{16}$
Поливинилхлорид (пластики)	6–8	6–15	$10^{10}–10^{12}$
Парафин	2–2,2	22–32	$10^{14}–10^{16}$
Эбонит	3–3,5	15–20	$10^{12}–10^{14}$
Гетинакс	6–8	20–40	$10^9–10^{11}$
Слюда (мусковит)	6,5–7,2	98–175	$10^{12}–10^{13}$
Мрамор	8–9	1–4	$10^7–10^8$
Шифер	6–8	0,5–1,5	$10^6–10^7$
Асбестоцемент	6–8	2–3	$10^6–10^7$

* Электрическая прочность всех материалов указана для действующего значения переменного напряжения.

Так как электрическое поле всегда существует между различными деталями электротехнических устройств, находящихся под напряжением, между этими деталями есть емкость.

Линейный емкостный элемент является составляющей схемы замещения любой части электротехнического устройства, если значение заряда пропорционально напряжению. Его параметром служит емкость $C = \text{const}$.

Если заряд не пропорционален напряжению, то схема замещения содержит *нелинейный емкостный элемент*, который задается нелинейной кулон-вольтовой характеристикой $q(u_C)$.

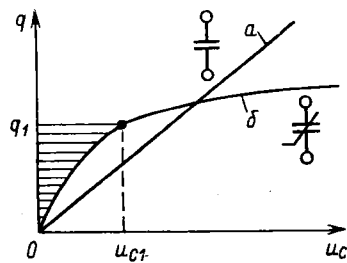


Рис. 2.4

На рис. 2.4 приведены кулон-вольтовые характеристики линейного (линия а) и нелинейного (линия б) емкостных элементов, а также условные обозначения таких элементов на схемах замещения.

Если напряжение, приложенное к емкостному элементу, изменяется (увеличивается или уменьшается), то изменяется и заряд, т. е. в емкостном элементе есть ток. Положительное направление тока в

емкостном элементе выберем совпадающим с положительным направлением приложенного к нему напряжения (рис. 2.3, в). По определению ток равен скорости изменения заряда:

$$i_{ab} = i_C = dq/dt. \quad (2.10)$$

В линейном емкостном элементе с учетом (2.7) ток

$$i_C = C du_C/dt. \quad (2.11)$$

Если за время t_1 напряжение на емкостном элементе изменится от нуля до u_{C1} , то в электрическом поле элемента будет накоплена энергия

$$W_3 = \int_0^{t_1} i_C u_C dt,$$

или с учетом (2.10)

$$W_3 = \int_0^{q_1} u_C dq = \int_0^{u_{C1}} u_C C(u_C) du_C, \quad (2.12)$$

где q_1 — свободный заряд при напряжении $u_C = u_{C1}$ (рис. 2.4).

Как следует из (2.12), энергия, запасенная в электрическом поле емкостного элемента при напряжении u_C , пропорциональна соответствующей площади, заключенной между кулон-вольтной характеристикой и осью ординат (рис. 2.4, где заштрихована площадь, пропорциональная энергии электрического поля нелинейного емкостного элемента при напряжении u_{C1}).

Из (2.12) с учетом (2.7) следует, что энергия электрического поля линейного емкостного элемента при напряжении u_C

$$W_3 = Cu_C^2/2 = qu_C/2. \quad (2.13)$$

Емкостные элементы можно, как и индуктивные элементы, рассматривать в качестве аккумуляторов энергии.

2.5. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Промышленными источниками синусоидального тока являются электромеханические генераторы, в которых механическая энергия паровых или гидравлических турбин преобразуется в электрическую. Конструкция и работа промышленных электромеханических генераторов будут подробно рассмотрены в дальнейшем. Здесь ограничимся лишь анализом принципа работы такого генератора при упрощающих

допущениях. Принципиальная конструкция двухполюсного электро-механического генератора изображена на рис. 2.5, а. Она содержит неподвижный, плоский разомкнутый виток с выводами a и b и постоянный магнит, который вращается с постоянной частотой f , т. е. с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi f$, рад/с, внутри витка.

Основная единица частоты в системе СИ — герц (Гц), $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$. Величина, обратная частоте, называется периодом — $T = 1/f$, с.

Пусть магнитный поток постоянного магнита равен Φ_m . Из пространственного распределения магнитного потока (рис. 2.5, б) следует, что мгновенное значение составляющей магнитного потока, пронизывающей виток, т. е. направленной вдоль оси x , равно

$$\Phi_x = \Phi_m \cos(\omega t + \alpha) = \Phi_m \sin(\omega t + \psi_\Phi), \quad (2.14)$$

где Φ_m — максимальное значение (амплитуда) магнитного потока, пронизывающего виток; α — начальный (т. е. в момент $t = 0$ принятый за начало отсчета времени) угол пространственного расположения постоянного магнита относительно оси x ; $\psi_\Phi = \pi/2 + \alpha$ — начальная фаза магнитного потока; $\omega t + \psi_\Phi$ — фаза магнитного потока. Здесь и в дальнейшем начальная фаза определяет значение синусоидальной функции в момент времени $t = 0$.

Согласно закону электромагнитной индукции при изменении потока сцепления витка в нем индуцируется ЭДС, положительное направление которой (рис. 2.5, а) связывают с положительным направлением потока Φ_x правилом буравчика (положительное направление ЭДС совпадает с направлением вращения рукоятки буравчика, ввинчивающегося в направлении магнитного потока Φ_x):

$$e = -d\Phi_x/dt = -\Phi_m \omega \sin(\omega t + \psi_\Phi) = E_m \sin(\omega t + \psi_e), \quad (2.15)$$

где $E_m = \omega\Phi_m$ — амплитуда ЭДС; $\psi_e = \psi_\Phi - \pi/2 = \alpha$ — начальная фаза ЭДС.

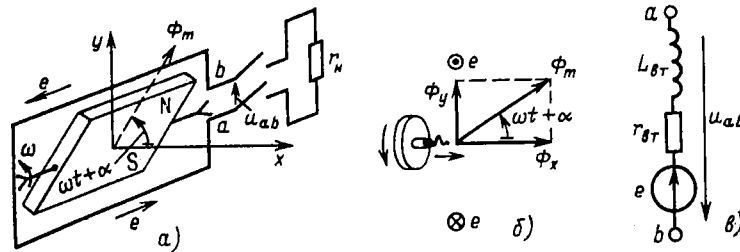


Рис. 2.5

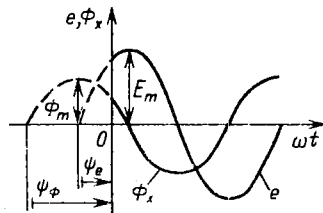


Рис. 2.6

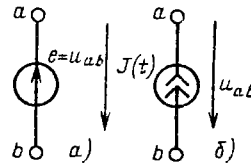


Рис. 2.7

На рис. 2.6 изображены зависимости магнитного потока $\Phi_x = \Phi_x(\omega t)$ и ЭДС $e = e(\omega t)$ от фазы ωt , т. е. от времени t . Заметим, что синусоидальные величины принято изображать графиками в виде зависимостей от ωt . Поэтому начальная фаза определяет смещение синусоидальной величины относительно начала координат, т. е. $\omega t = 0$. Начальная фаза отсчитывается вдоль оси абсцисс от ближайшего к началу координат нулевого значения синусоидальной величины при ее переходе от отрицательных значений к положительным до начала координат. Если начальная фаза больше (меньше) нуля, то начало синусоидальной величины сдвинуто влево, как на рис. 2.6, (вправо) от начала координат.

Если к выводам a и b генератора подключить резистор с сопротивлением нагрузки r_n (рис. 2.5, а), то в полученной цепи возникает синусоидальный ток i .

На рис. 2.5, б приведена схема замещения электромеханического генератора, в которой резистивный $r_{вт}$ и индуктивный $L_{вт}$ элементы отображают внутренние параметры генератора: сопротивление проводов и индуктивность витка.

Если параметрами резистивного и индуктивного элементов в схеме замещения генератора можно при расчете в цепи пренебречь, то его схемой замещения будет идеальный источник синусоидальной ЭДС или источник синусоидального напряжения (рис. 2.7, а). Если ток в цепи генератора не зависит от параметров внешней цепи, то схемой замещения генератора будет идеальный источник синусоидального тока $J(t)$ (рис. 2.7, б), где $J(t) = i_k$ — ток генератора при коротком замыкании его выводов a и b .

Источники ЭДС и тока называются *активными элементами*, а резистивные, индуктивные и емкостные элементы — *пассивными элементами* схем замещения.

2.6. МАКСИМАЛЬНОЕ, СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

В линейной цепи при действии синусоидально изменяющейся ЭДС токи также синусоидальны:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где ω — угловая частота; ψ_i — начальная фаза; I_m — максимальное значение (амплитуда) тока.

Средним значением синусоидальной величины считают ее среднее значение за положительный полупериод, совпадающее со средним значением по модулю. Например, для тока вычислим среднее значение, выбрав начальную фазу равной нулю:

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2I_m}{\pi}. \quad (2.16)$$

Среднее значение тока измеряется приборами магнитоэлектрической системы, измерительная цепь которых содержит выпрямитель тока.

Синусоидальный ток в резистивном элементе с сопротивлением r вызывает нагрев этого элемента из-за выделения тепловой энергии. Такую же тепловую энергию в этом же резистивном элементе можно получить при некотором постоянном токе. Определенное посредством такого сравнения значение постоянного тока называется *действующим значением* соответствующего синусоидального тока.

При синусоидальном токе за один период T в резистивном элементе с сопротивлением r выделяется тепловая энергия

$$W_T = \int_0^T r i^2 dt,$$

где i — мгновенное значение синусоидального тока.

По определению действующего значения синусоидального тока такое же количество тепловой энергии в том же резистивном элементе должно выделяться при постоянном токе за тот же интервал времени T :

$$W_T = r I^2 T.$$

Следовательно,

$$r I^2 T = \int_0^T r i^2 dt,$$

откуда находим действующее значение синусоидального тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.17)$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока определяется как среднее квадратичное за период. На рис. 2.8 показаны синусоидальный ток i , изменение во времени квадрата тока i^2 и графи-

ческое определение значения I^2 (из равенства площадей $I^2 T = \int i^2 dt$), а тем самым и действующего значения I .

Для синусоидального тока нетрудно определить действующее значение через амплитудное:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} =$$

$$= I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt},$$

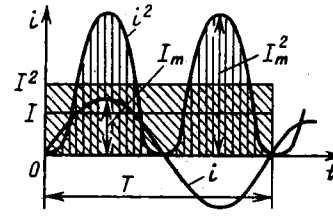


Рис. 2.8

и так как $\int_0^T dt = T$, а $\int_0^T \cos 2\omega t dt = 0$, то

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (2.18)$$

Действующее значение выбрано в качестве основной характеристики синусоидального тока потому, что в большом числе случаев его действие пропорционально квадрату этого значения, например тепловое действие, взаимодействие прямого и обратного проводов двухпроводной линии и т. д.

Аналогично для любой другой синусоидальной величины $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ (ЭДС, напряжение, магнитный поток и т. д.) *среднее значение*

$$A_{\text{ср}} = 2A_m / \pi \approx 0,637A_m; \quad (2.19a)$$

действующее значение

$$A = A_m / \sqrt{2} \approx 0,707A_m. \quad (2.19б)$$

2.7. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Известно несколько способов представления синусоидально изменяющихся величин: в виде тригонометрических функций, в виде графиков изменений во времени, в виде вращающихся векторов и, наконец, в виде комплексных чисел.

В § 2.5 и 2.6 уже применялись представления синусоидально изменяющихся величин в виде тригонометрических функций, например (2.14), (2.15), и в виде графика изменений во времени (рис. 2.6).

Теперь рассмотрим представление синусоидально изменяющихся величин в виде вращающихся векторов и комплексных чисел.

А. Представление синусоидальных величин вращающимися векторами. Для представления синусоидально изменяющейся величины

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi)$$

с начальной фазой ψ вращающимся вектором построим (рис. 2.9, а) радиус-вектор $\vec{A}_m$ этой величины длиной (в масштабе построения), равной амплитуде A_m , и под углом ψ к горизонтальной оси. Это будет его исходное положение в момент начала отсчета времени $t = 0$.

Если радиус-вектор вращать с постоянной угловой скоростью ω против направления движения часовой стрелки, то его проекция на вертикальную ось будет равна $A_m \sin(\omega t + \psi)$. По значениям этих величин можно построить график зависимости синусоидальной величины от фазы ωt или от времени t . Такое построение приведено для некоторых значений t на рис. 2.9, б.

Применение вращающихся векторов позволяет компактно представить на одном рисунке совокупность различных синусоидально изменяющихся величин одинаковой частоты.

Б. Представление синусоидальных величин комплексными числами. От представления синусоидальных величин вращающимися радиусами-векторами нетрудно перейти к представлению синусоидальных величин комплексными числами.

Для того чтобы представить синусоидальную величину

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2.20)$$

с начальной фазой ψ комплексным числом, проведем на комплексной плоскости (рис. 2.10) из начала координат под углом ψ к оси действитель-

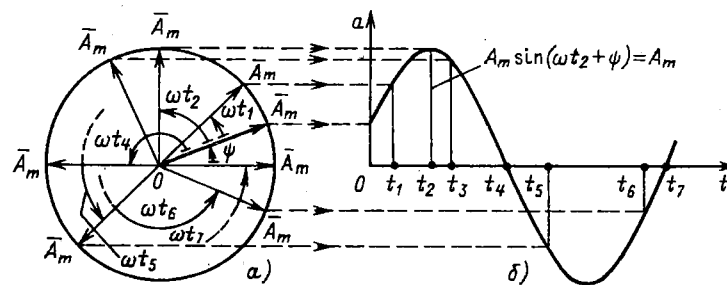


Рис. 2.9

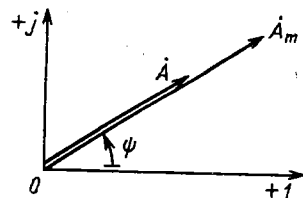


Рис. 2.10

тельных величин и чисел вектор, длина которого в масштабе построения равна амплитуде A_m синусоидальной величины. Конец этого вектора находится в точке, которой соответствует определенное комплексное число — *комплексная амплитуда* синусоидальной величины:

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\psi} = A_m \angle \psi.$$

Так же обозначается и соответствующий комплексной амплитуде вектор на комплексной плоскости.

При увеличении во времени фазы $\omega t + \psi$ синусоидальной величины угол между вектором и осью действительных величин растет, т. е. получается вращающийся вектор

$$A_m e^{j(\omega t + \psi)} = A_m \cos(\omega t + \psi) + jA_m \sin(\omega t + \psi).$$

Нетрудно видеть, что мнимая часть вращающегося вектора равна заданной синусоидальной величине (2.20).

По существу представление синусоидальной величины комплексной амплитудой $\dot{A}_m$ и соответствующим ей вектором на комплексной плоскости геометрически подобно представлению той же синусоидальной величины вращающимся радиусом-вектором $\vec{A}_m$ в момент времени $t = 0$ (рис. 2.9, а). Поэтому может создаться впечатление, что оба представления синусоидальных величин практически совпадают. В действительности это не так. В случае представления синусоидальных величин комплексными числами можно применить весьма эффективный комплексный метод анализа электрических цепей синусоидального тока, который в настоящее время завоевал всеобщее признание.

Вектор на комплексной плоскости, длина которого в масштабе построения равна действующему значению синусоидальной величины, и соответствующее комплексное число называются *комплексным действующим значением синусоидальной величины*:

$$\dot{A} = \dot{A}_m / \sqrt{2} = A e^{j\psi} = A \angle \psi. \quad (2.21)$$

Так же обозначается и сам вектор на комплексной плоскости (рис. 2.10).

Применяются три формы записи комплексного значения синусоидальной величины:

показательная форма

$$\dot{A} = A e^{j\psi} = A \angle \psi; \quad (2.22)$$

тригонометрическая форма

$$\dot{A} = A \cos \psi + jA \sin \psi \quad (2.23)$$

и алгебраическая форма

$$\dot{A} = \operatorname{Re} \dot{A} + j \operatorname{Im} \dot{A}, \quad (2.24)$$

где $\operatorname{Re} \dot{A} = A \cos \psi$ и $\operatorname{Im} \dot{A} = A \sin \psi$ — действительная и мнимая составляющие комплексного значения синусоидальной величины; $A = \sqrt{(\operatorname{Re} \dot{A})^2 + (\operatorname{Im} \dot{A})^2}$; $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \dot{A}}{\operatorname{Re} \dot{A}}$.

Переход от показательной формы к тригонометрической выполнен при помощи формулы Эйлера:

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi. \quad (2.25)$$

При значениях угла $\psi = \pi/2$ и $\psi = -\pi/2$ из формулы Эйлера следуют два часто встречающихся соотношения

$$e^{j\pi/2} = j \quad \text{и} \quad e^{-j\pi/2} = -j = 1/j. \quad (2.26)$$

При анализе цепей синусоидального тока применяют главным образом комплексные действующие значения синусоидальных величин; сокращенно их называют *комплексными значениями*, а соответствующие векторы на комплексной плоскости — *векторами комплексных значений*. Например, синусоидальному току

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

соответствует комплексное значение тока

$$\dot{i} = I e^{j\psi_i} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 7,07 \angle 45^\circ.$$

Совокупность векторов комплексных значений синусоидальных величин одной частоты называется *векторной диаграммой*. Пользуясь векторной диаграммой, сложение и вычитание комплексных значений можно заменить сложением и вычитанием соответствующих векторов. Это упрощает расчеты и делает их наглядными.

Взаимное расположение векторов комплексных значений на векторной диаграмме не изменится, если начальные фазы ψ всех комплексных значений уменьшить (увеличить) на одну и ту же величину. Это означает лишь одновременный поворот всех векторов на один и тот же угол. Часто при анализе цепей векторную диаграмму строят так, чтобы вектор одного комплексного значения был направлен вдоль оси действительных величин. Такой вектор называется *исходным вектором*.

Направления синусоидальных величин (ток, напряжение и др.) в цепи периодически изменяются, но одно из двух направлений принимается положительным. Это направление выбирается произвольно и показывается стрелкой на схеме соответствующего участка цепи. При

выбранном положительном направлении синусоидальная величина представляется мгновенным значением $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ и соответствующим комплексным значением $\dot{A} = A \angle \psi$ [см. (2.21)]. Следовательно, взаимно однозначному представлению синусоидальных токов, напряжений и других величин в виде мгновенных и комплексных значений соответствуют их одинаковые положительные направления (рис. 2.11).

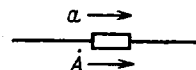


Рис. 2.11

2.8. ЗАКОН ОМА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ДЛЯ РЕЗИСТИВНОГО, ИНДУКТИВНОГО И ЕМКОСТНОГО ЭЛЕМЕНТОВ

Зависимости между токами и напряжениями резистивных, индуктивных и емкостных элементов определяются происходящими в них физическими процессами. Математическое описание физических явлений для каждого из этих элементов зависит от выбранного способа представления синусоидальных величин.

А. Резистивный элемент. Если ток в резистивном элементе синусоидальный

$$i_r = I_{rm} \sin(\omega t + \psi_i),$$

то по закону Ома (1.1) напряжение, приложенное к элементу (рис. 2.12), равно

$$u_r = r i_r = r I_{rm} \sin(\omega t + \psi_i) = U_{rm} \sin(\omega t + \psi_u),$$

где амплитуды тока и напряжения связаны соотношением

$$U_{rm} = r I_{rm}, \quad (2.27a)$$

а их начальные фазы одинаковые:

$$\psi_u = \psi_i, \quad (2.27b)$$

т. е. ток и напряжение в резистивном элементе изменяются синфазно — совпадают по фазе, как показано на рис. 2.12 для начальной фазы $\psi_u = \psi_i > 0$.

Разделив правую и левую части выражения (2.27a) на $\sqrt{2}$, получим соотношение для действующих значений напряжения и тока резистивного элемента:

$$U_r = r I_r. \quad (2.28)$$

Представим теперь синусоидальные ток и напряжение резистивного элемента соответствующими комплексными значениями (2.22):

$$\dot{I}_r = I_r e^{j\psi_i} \quad \text{и} \quad \dot{U}_r = U_r e^{j\psi_u}.$$

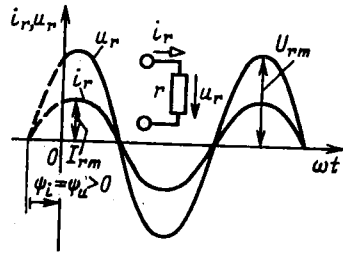


Рис. 2.12

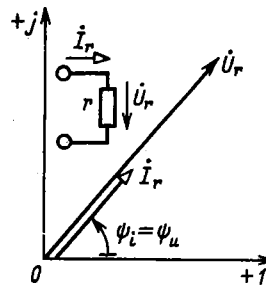


Рис. 2.13

Учитывая (2.28) и (2.276), получим закон Ома в комплексной форме для резистивного элемента:

$$\dot{U}_r = r \dot{I}_r. \quad (2.29)$$

Соотношение между комплексными значениями тока и напряжения для резистивного элемента наглядно иллюстрируется векторной диаграммой (рис. 2.13). Из векторной диаграммы также видно, что векторы комплексных значений тока и напряжения резистивного элемента совпадают по фазе.

Б. Индуктивный элемент. Если в индуктивном элементе ток синусоидальный:

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i),$$

то по закону электромагнитной индукции (2.3) напряжение на индуктивном элементе равно

$$\begin{aligned} u_L &= -e_L = L di_L/dt = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \psi_i) = \\ &= U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u), \end{aligned}$$

где амплитуды напряжения и тока связаны соотношением

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm}, \quad (2.30a)$$

а их начальные фазы — соотношением

$$\psi_u = \psi_i + \pi/2. \quad (2.30б)$$

Разделив правую и левую части выражения (2.30a) на $\sqrt{2}$, получим соотношение для действующих значений напряжения и тока индуктивного элемента:

$$U_L = \omega L I_L = x_L I_L. \quad (2.31)$$

На рис. 2.14 показан график мгновенных значений синусоидальных тока и напряжения индуктивного элемента (построен при $\psi_i > 0$), из которого видно, что синусоидальный ток i_L отстает по фазе от синусоидального напряжения u_L на угол $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2$.

Величина $x_L = \omega L$ в выражении (2.31), единица которой Ом, называется *индуктивным сопротивлением*, а обратная величина $b_L = 1/\omega L$, единица которой $\text{Ом}^{-1} = \text{См}$, — *индуктивной проводимостью*. Значения величин x_L и b_L являются параметрами индуктивных элементов цепей синусоидального тока.

Представим синусоидальные ток i_L и напряжение u_L индуктивного элемента соответствующими комплексными значениями:

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_i} \quad \text{и} \quad \dot{U}_L = U_L e^{j\psi_u}.$$

На рис. 2.15 приведена векторная диаграмма для индуктивного элемента. На векторной диаграмме показано, что вектор комплексного значения тока $\dot{I}_L$ отстает по фазе от вектора комплексного значения напряжения $\dot{U}_L$ на угол $\pi/2$. Пользуясь выражениями (2.31) и (2.26), получим закон Ома в комплексной форме для индуктивного элемента:

$$\dot{U}_L = \omega L I_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i + \pi/2)},$$

или

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jx_L \dot{I}_L. \quad (2.32)$$

Входящая в это выражение величина $j\omega L = jx_L$ называется *комплексным сопротивлением индуктивного элемента*, а обратная ей величина $1/j\omega L = -jb_L$ — *комплексной проводимостью индуктивного элемента*.

Комплексное значение напряжения на индуктивном элементе можно выразить и через комплексное значение потокосцепления.

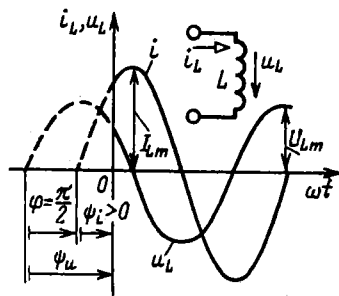


Рис. 2.14

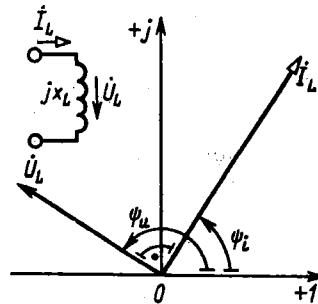


Рис. 2.15

Из (2.1) следует, что $\dot{\Psi} = L\dot{I}_L$, и по (2.32)

$$\dot{U}_L = -\dot{E}_L = j\omega\dot{\Psi}. \quad (2.33)$$

Это — математическая формулировка закона электромагнитной индукции (2.3) в комплексной форме.

Иногда на векторной диаграмме, например при анализе трансформаторов, изображают также вектор $\dot{E}_L$, который направлен в сторону, противоположную $\dot{U}_L$, как следует из (2.33), и равен ему по абсолютному значению.

В. Емкостный элемент. Если напряжение между выводами емкостного элемента изменяется синусоидально:

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u),$$

то по (2.11) синусоидальный ток

$$\begin{aligned} i_C &= C du_C/dt = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) = \\ &= I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u + \pi/2) = I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i), \end{aligned}$$

где амплитуды напряжения и тока связаны соотношением

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm}, \quad (2.34a)$$

а их начальные фазы — соотношением

$$\psi_i = \psi_u + \pi/2. \quad (2.34b)$$

Разделив правую и левые части выражения (2.34a) на $\sqrt{2}$, получим соотношение для действующих значений напряжения и тока емкостного элемента:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_C = I_C / b_C. \quad (2.35)$$

Величина $b_C = \omega C$ в выражении (2.35), единица которой $\text{Ом}^{-1} = \text{См}$, называется *емкостной проводимостью*, а обратная величина $x_C = 1/\omega C$, единица которой Ом , — *емкостным сопротивлением*. Значения величин x_C и b_C являются параметрами емкостных элементов цепей синусоидального тока.

В противоположность индуктивному сопротивлению емкостное сопротивление уменьшается с увеличением частоты синусоидального тока. При постоянном напряжении сопротивление бесконечно велико.

На рис. 2.16 показан график мгновенных значений синусоидальных напряжения и тока для емкостного элемента (построен при $\psi_u > 0$), из которого видно, что синусоидальное напряжение u_C отстает по фа-

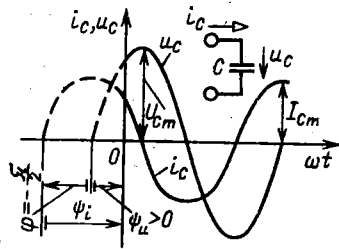


Рис. 2.16

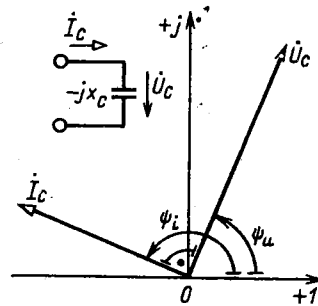


Рис. 2.17

зе от синусоидального тока i_C на угол $\psi_i - \psi_u = \pi/2$, т. е. сдвиг по фазе между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2$.

Представим синусоидальные ток i_C и напряжение u_C емкостного элемента соответствующими комплексными значениями:

$$\dot{I}_C = I_C e^{j\psi_i} \quad \text{и} \quad \dot{U}_C = U_C e^{j\psi_u}.$$

На рис. 2.17 приведена векторная диаграмма для емкостного элемента и показано, что вектор комплексного значения напряжения $\dot{U}_C$ отстает по фазе от вектора комплексного значения тока $\dot{I}_C$ на угол $\pi/2$.

Учитывая (2.34) и (2.26), получаем закон Ома в комплексной форме для емкостного элемента:

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = -jx_C \dot{I}_C. \quad (2.36)$$

Величина $1/j\omega C = -jx_C$, входящая в это выражение, называется комплексным сопротивлением емкостного элемента, а обратная ей величина $j\omega C = jb_C$ — комплексной проводимостью емкостного элемента.

2.9. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Математическая формулировка законов Кирхгофа для цепей синусоидального тока зависит от выбранного способа представления синусоидальных величин.

А. Первый закон Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (2.37)$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^n I_{mk} \sin(\omega t + \psi_{ik}) = 0,$$

где n — число ветвей, сходящихся в узле. В дальнейшем все синусоидальные токи, положительные направления которых выбраны к узлу (от узла), будем записывать со знаком минус (плюс).

На рис. 2.18 в качестве примера для одного из узлов построены мгновенные значения трех синусоидальных токов

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}), \quad i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2})$$

и

$$i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_{i3})$$

при выбранных положительных направлениях. По первому закону Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^3 i_k = -i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

для любого момента времени.

Чтобы получить математическую формулировку *первого закона Кирхгофа в комплексной форме*, представим все синусоидальные токи в (2.37) соответствующими им комплексными значениями (2.21): $I_k = I_k \angle \psi_{ik}$.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0, \quad (2.38)$$

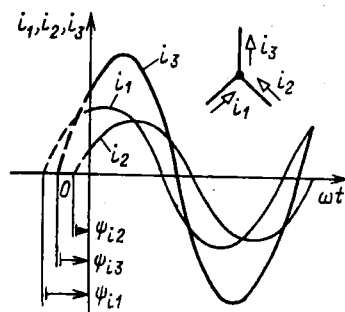


Рис. 2.18

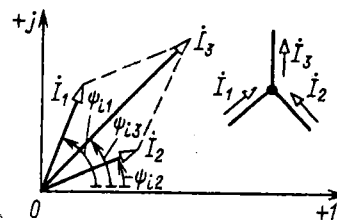


Рис. 2.19

т. е. алгебраическая сумма комплексных значений токов всех ветвей, сходящихся в каком-либо узле цепи синусоидального тока, равна нулю. Здесь комплексные значения токов, для которых положительные направления выбраны к узлу (от узла), записываются со знаком минус (плюс).

На рис. 2.19 построена векторная диаграмма трех токов:

$$\dot{I}_1 = I_1 \angle \psi_{i1}; \quad \dot{I}_2 = I_2 \angle \psi_{i2} \quad \text{и} \quad \dot{I}_3 = I_3 \angle \psi_{i3}.$$

На векторной диаграмме должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^3 \dot{I}_k = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.$$

Б. Второй закон Кирхгофа. По второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений всех участков любого контура в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_{k=1}^m u_k = 0, \quad (2.39)$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^m U_{mk} \sin(\omega t + \psi_{uk}) = 0,$$

где напряжения, положительные направления которых совпадают (противоположны) с выбранным направлением обхода контура, записываются со знаком плюс (минус); m — число участков. В частности, для контура схемы замещения, содержащего только пассивные элементы (резистивные, индуктивные, емкостные) и источники ЭДС, в каждый момент времени алгебраическая сумма напряжений на пассивных элементах контура равна алгебраической сумме ЭДС:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^m e_k \quad (2.40)$$

или

$$\sum_{k=1}^n U_{mk} \sin(\omega t + \psi_{uk}) = \sum_{k=1}^m E_{mk} \sin(\omega t + \psi_{ek}),$$

где n и m — соответственно числа пассивных элементов и ЭДС в контуре. В выражении (2.40) напряжения u_k и ЭДС e_k , для которых положительные направления совпадают (противоположны) с произвольно выбранным направлением обхода контура, записываются со знаком плюс (минус).

Например, для выбранного на схеме замещения (рис. 2.20) контура 1 по (2.39)

$$u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0,$$

для контура 2 по (2.40)

$$u_r - u_L = e_1 - e_2.$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме получим, представив все синусоидальные величины в (2.39) и (2.40) соответствующими комплексными значениями по (2.21):

$$\dot{U}_k = U_k \angle \psi_{uk} \quad \text{и} \quad \dot{E}_k = E_k \angle \psi_{ek},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^m \dot{U}_k = 0 \quad (2.41a)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^m \dot{E}_k. \quad (2.41b)$$

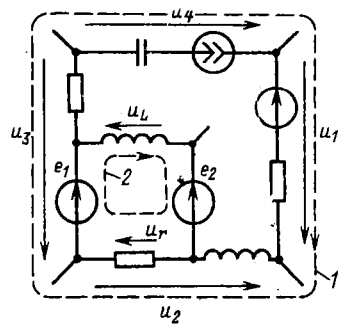


Рис. 2.20

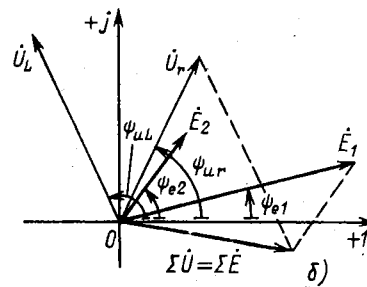
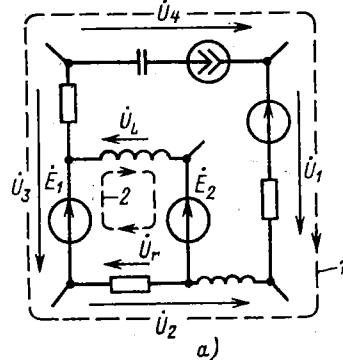


Рис. 2.21

В уравнениях (2.41) со знаком плюс (минус) записываются комплексные значения напряжений и ЭДС, положительные направления которых совпадают (противоположны) с произвольно выбранным направлением обхода контура.

Например, для выбранного на схеме цепи (рис. 2.21, а) контура 1 по (2.41а)

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 - \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 0$$

для контура 2 по (3.41б)

$$\dot{U}_r - \dot{U}_L = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Те же контуры 1 и 2 показаны на схеме замещения с комплексными величинами (рис. 2.20).

На рис. 2.21, б построена векторная диаграмма ЭДС и напряжений контура 2, которая наглядно иллюстрирует второй закон Кирхгофа в комплексной форме.

2.10. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Между мгновенными значениями синусоидальных величин (2.20) и их комплексными значениями (2.21) существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому для описания режима работы цепи синусоидального тока можно применять любой из этих способов представления синусоидальных величин. Однако в случае представления синусоидальных величин комплексными значениями запись законов Ома и Кирхгофа упрощается ввиду отсутствия тригонометрических функций.

Совместное решение алгебраических уравнений, составленных на основе законов Ома и Кирхгофа, для определения комплексных значений токов и напряжений всех элементов цепи, т. е. применение комплексного метода расчета, — достаточно простая задача. По найденным комплексным значениям можно записать при необходимости и соответствующие им мгновенные значения синусоидальных величин.

При расчете режима работы цепи синусоидального тока комплексным методом полезно выделить несколько логически самостоятельных этапов:

1) представить исходные данные о параметрах всех элементов цепи в комплексной форме. Это означает, что, во-первых, синусоидальные ЭДС источников напряжения или токи источников тока, заданные мгновенными значениями (в тригонометрической форме), следует представить комплексными значениями (табл. 2.3) и, во-вторых, для индуктивных и емкостных элементов цепи нужно определить соответствующие комплексные сопротивления или комплексные проводимости (табл. 2.4);

Таблица 2.3. Представление синусоидальных ЭДС и токов источников комплексными значениями

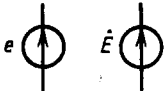
Источник	Мгновенное значение	Комплексное значение	Условное изображение
ЭДС	$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$	$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_e}$	
Тока	$J(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_J)$	$\dot{J} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_J}$	

Таблица 2.4. Комплексные сопротивления и проводимости пассивных элементов

Элемент	Параметр	Комплексное сопротивление	Комплексная проводимость
Резистивный	r	r	$\frac{1}{r} = g$
Индуктивный	L	$j\omega L = jx_L$	$\frac{1}{j\omega L} = -jb_L$
Емкостный	C	$\frac{1}{j\omega C} = -jx_C$	$j\omega C = jb_C$

2) выбрать положительные направления для токов во всех ветвях, указав их стрелками на схеме замещения;

3) пользуясь законами Ома и Кирхгофа в комплексной форме и учитывая выбранные положительные направления токов в ветвях, составить систему уравнений, определяющую режим работы цепи;

4) решить полученную систему уравнений, т. е. определить комплексные значения токов в ветвях цепи и комплексные значения напряжений на ее элементах.

Найденные комплексные значения токов и напряжений однозначно определяют соответствующие им мгновенные значения синусоидальных токов и напряжений.

В качестве примера рассмотрим расчет комплексным методом цепи синусоидального тока со схемой замещения на рис. 2.22, содержащей $B = 5$ ветвей, из которых $B_J = 1$ ветвь имеет источник тока $J(t) = J_m \sin(\omega t + \psi_J)$, и $Y = 3$ узла, а также источник ЭДС $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

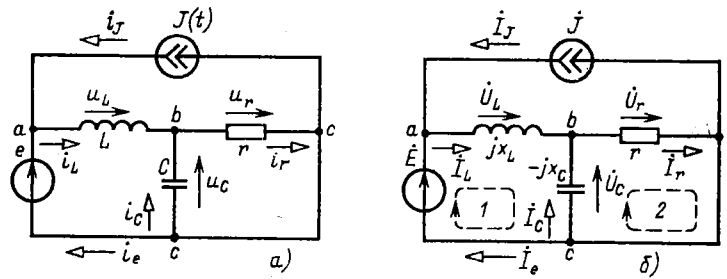


Рис. 2.22

Для этого выполним последовательно все этапы расчета.

1. Представим синусоидальные ЭДС $e(t)$ и ток $J(t)$ источников соответствующими комплексными значениями [см. (2.21) и табл. 2.3]:

$$\dot{E} = E \angle \psi_e; \quad \dot{J} = J \angle \psi_J.$$

Определим комплексные сопротивления индуктивного $j\omega L = jx_L$ и емкостного $1/j\omega C = -jx_C$ элементов (см. табл. 2.4).

На рис. 2.22, б изображена схема, для которой исходные данные о параметрах всех элементов представлены в комплексной форме.

2. Выберем положительные направления неизвестных токов в ветвях (рис. 2.22, а) и совпадающие с ними положительные направления напряжений на пассивных элементах. Положительные направления соответствующих им комплексных значений такие же (рис. 2.22, б).

3. При выбранных положительных направлениях токов и напряжений составим $Y - 1 = 3 - 1 = 2$ независимых уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов а и б:

$$-\dot{J} - \dot{i}_e + \dot{i}_L = 0; \quad -\dot{i}_L - \dot{i}_C + \dot{i}_r = 0 \quad (2.42a)$$

и $K = B - B_J - Y + 1 = 5 - 1 - 3 + 1 = 2$ независимых уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров 1 и 2 (без источников тока!):

$$\dot{U}_L - \dot{U}_C = \dot{E}; \quad \dot{U}_r - \dot{U}_C = 0,$$

или

$$jx_L \dot{I}_L + jx_C \dot{I}_C = \dot{E}; \quad (2.42б)$$

$$r \dot{I}_r - jx_C \dot{I}_C = 0, \quad (2.42в)$$

где учтены соотношения (2.29), (2.32), (2.36) законов Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_r = r \dot{I}_r; \quad U_L = jx_L \dot{I}_L; \quad \dot{U}_C = -jx_C \dot{I}_C.$$

4. Решив совместно систему четырех алгебраических уравнений (2.42), определим комплексные значения токов:

$$\dot{I}_r = I_r e^{j\psi_{ir}}; \quad \dot{I}_L = I_L e^{j\psi_{iL}}; \quad \dot{I}_C = I_C e^{j\psi_{iC}}; \quad \dot{I}_e = I_e e^{j\psi_{ie}}.$$

Для найденных значений токов запишем соответствующие им мгновенные значения:

$$i_r = \sqrt{2} I_r \sin(\omega t + \psi_{ir}); \quad i_L = \sqrt{2} I_L \sin(\omega t + \psi_{iL}); \\ i_C = \sqrt{2} I_C \sin(\omega t + \psi_{iC}); \quad i_e = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t + \psi_{ie}).$$

Комплексные значения напряжения определяются по закону Ома, а мгновенные значения записываются аналогично мгновенным значениям токов.

Для расчета системы уравнений (2.42) при помощи ЭВМ ее следует представить аналогично (1.13) в матричной форме подобно (1.10):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & jx_L & jx_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -jx_C & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_J \\ \dot{I}_e \\ \dot{I}_L \\ \dot{I}_C \\ \dot{I}_r \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{J} \\ \dot{E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где ток в ветви с источником тока $\dot{I}_J = \dot{J}$.

Для линейных цепей синусоидального тока, так же как и для линейных цепей постоянного тока, справедлив принцип наложения (см. § 1.12). Поэтому для упрощения анализа линейных цепей синусоидального тока можно применять различные методы расчета, которые были рассмотрены при анализе линейных цепей постоянного тока: метод

преобразования схем (см. § 1.9), метод узловых потенциалов (см. § 1.10), метод контурных токов (см. § 1.11), метод эквивалентного источника (см. § 1.14) и др. При этом математические формулировки различных методов расчета цепей постоянного тока остаются справедливыми и для расчета цепей синусоидального тока. Нужно только все ЭДС, напряжения и токи заменить комплексными значениями соответствующих синусоидальных величин, а сопротивления элементов — комплексными сопротивлениями.

В дальнейшем для понятий *комплексные значения ЭДС, напряжения, токи* и т. д., а также соответствующих им векторов комплексных значений будем пользоваться и сокращенными терминами, например *комплексный ток* или просто *ток*.

2.11. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В неразветвленной цепи (рис. 2.23) при действии источника синусоидальной ЭДС $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ ток также синусоидален: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ и напряжения на резистивном, индуктивном и емкостном элементах

$$u_r = U_{rm} \sin(\omega t + \psi_{ur}); \quad u_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}); \\ u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC}).$$

Для расчета режима работы неразветвленной цепи комплексным методом представим все синусоидальные величины соответствующими комплексными по (2.21):

$$\dot{E} = E \angle \psi_e; \quad \dot{I} = I \angle \psi_i; \quad \dot{U}_r = U_r \angle \psi_{ur}; \\ \dot{U}_L = U_L \angle \psi_{uL}; \quad \dot{U}_C = U_C \angle \psi_{uC}.$$

На рис. 2.23 стрелками изображены положительные направления тока, ЭДС и напряжений.

Выберем направление обхода контура и запишем уравнение по второму закону Кирхгофа (2.41):

$$\dot{U}_L + \dot{U}_r + \dot{U}_C = j\omega L \dot{I} + r \dot{I} - j/\omega C \dot{I} = \dot{E}; \quad (2.43)$$

здесь учтен закон Ома для резистивного (2.29), индуктивного (2.32) и емкостного (2.36) элементов.

Из (2.43) найдем комплексный ток в цепи:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{r + j(\omega L - 1/\omega C)},$$

или

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{r + j(\omega L - 1/\omega C)}, \quad (2.44)$$

где $\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \dot{E} = Ee^{j\psi_e}$ — напряжение между выводами источника и пассивного участка.

Величина, стоящая в знаменателе выражения для комплексного тока (2.44), называется *комплексным сопротивлением* (неразветвленного участка цепи):

$$\underline{Z} = r + j[\omega L - 1/(\omega C)] = r + j(x_L - x_C). \quad (2.45a)$$

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется *комплексной проводимостью*:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}.$$

Каждому значению комплексного сопротивления $\underline{Z}$, т. е. комплексному числу, соответствует точка на комплексной плоскости. Ее положение однозначно определяется вектором на комплексной плоскости (рис. 2.24). Этот вектор является геометрической интерпретацией комплексного сопротивления и имеет такое же обозначение $\underline{Z}$. Слагаемые комплексного сопротивления изображены на рис. 2.24 также в виде векторов для двух случаев: $x_L > x_C$ (рис. 2.24, а) и $x_L < x_C$

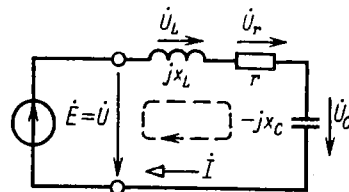


Рис. 2.23

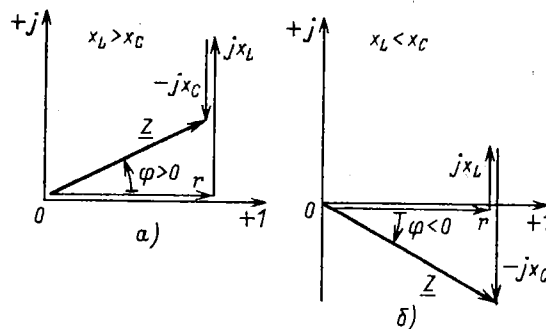


Рис. 2.24

(рис. 2.24, б). Геометрическая интерпретация комплексного сопротивления позволяет легко перейти от алгебраической формы записи комплексного сопротивления (2.45а) к тригонометрической и показательной формам:

$$\underline{Z} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi; \quad (2.45б)$$

$$\underline{Z} = z e^{j\varphi} = z \angle \varphi, \quad (2.45в)$$

где $z = |\underline{Z}| = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}$ — модуль комплексного сопротивления или *полное сопротивление*; $\varphi = \arctg \frac{(x_L - x_C)}{r}$ — аргумент комплексного сопротивления. В зависимости от знака величины $(x_L - x_C)$ аргумент комплексного сопротивления может быть либо положительным ($\varphi > 0$ — индуктивный характер комплексного сопротивления, как на рис. 2.24, а), либо отрицательным ($\varphi < 0$ — емкостный характер комплексного сопротивления, как на рис. 2.24, б), но всегда $|\varphi| \leq \pi/2$.

Подставим значение комплексного сопротивления в показательной форме (2.45в) в (2.44). При этом ток в цепи будет определен по *закону Ома для неразветвленной цепи*:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \frac{E}{z} e^{j(\psi_e - \varphi)},$$

или

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)}, \quad (2.46)$$

т. е.

$$I = U/z; \quad \psi_i = \psi_u - \varphi. \quad (2.47)$$

При известном комплексном токе в цепи комплексные напряжения на резистивном, индуктивном и емкостном элементах рассчитываются соответственно по (2.29), (2.32), (2.36).

На рис. 2.25 приведены векторные диаграммы тока и напряжений неразветвленной цепи (рис. 2.23) для двух случаев: $x_L > x_C$ (рис. 2.25, а) и $x_L < x_C$ (рис. 2.25, б) при одинаковом заданном напряжении $U = \dot{U} \angle \psi_u$.

Если комплексное сопротивление цепи имеет индуктивный характер, то ток $\dot{I}$ отстает по фазе от напряжения $\dot{U}$, так как $\varphi > 0$ (рис. 2.24, а) и по (2.47) $\psi_i < \psi_u$. Если комплексное сопротивление цепи имеет емкостный характер, то ток в цепи опережает по фазе напряжение, так

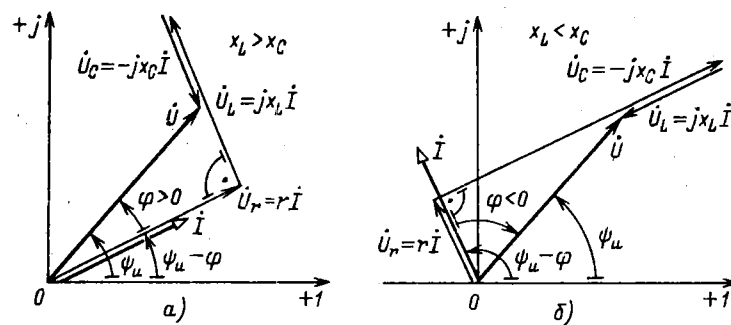


Рис. 2.25

как $\varphi < 0$ (рис. 2.24, б) и по (2.47) $\psi_i > \psi_u$. На векторной диаграмме положительное значение угла φ отсчитывается против направления движения часовой стрелки от вектора комплексного значения тока I , а отрицательное значение — по направлению движения часовой стрелки.

При нескольких последовательно соединенных резистивных индуктивных и емкостных элементах комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \Sigma R + j(\Sigma x_L - \Sigma x_C) = r + jx, \quad (2.48)$$

где $r = \Sigma R$ — активное сопротивление и $x = \Sigma x_L - \Sigma x_C$ — реактивное сопротивление этой неразветвленной цепи. В активном сопротивлении происходит необратимое преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а в реактивном сопротивлении необратимых преобразований нет.

Введенные здесь понятия об активном и реактивном сопротивлениях неразветвленной цепи применяются и для характеристики более сложных цепей. В общем случае можно говорить об активном и реактивном сопротивлениях любой пассивной цепи синусоидального тока, имеющей два вывода, т. е. пассивного двухполюсника.

Напряжение на элементах схемы замещения, соответствующих активному или реактивному сопротивлению цепи, называется падением напряжения.

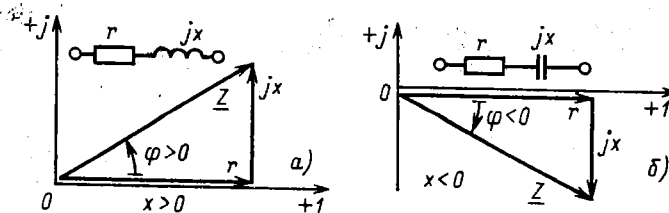


Рис. 2.26

Выражению (2.48) соответствуют *треугольники сопротивлений* на комплексной плоскости. На рис. 2.26, *а* и *б* построены треугольники сопротивлений при $x > 0$ и $x < 0$, т. е. при индуктивном и емкостном характере комплексного сопротивления. Там же показаны схемы замещения соответствующих цепей. Из треугольников сопротивлений наглядно определяются тригонометрическая и показательная формы комплексного сопротивления неразветвленной пассивной цепи, совпадающие с выражениями (2.45), причем полное сопротивление z и аргумент φ комплексного сопротивления (2.48) будут

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad (2.49a)$$

$$\varphi = \arctg(x/r). \quad (2.49б)$$

Если для каждого участка неразветвленной цепи известно комплексное сопротивление $\underline{Z}_k$, то сопротивление неразветвленной цепи

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_k + \dots + \underline{Z}_n,$$

где n — число участков.

2.12. АКТИВНОЕ, РЕАКТИВНОЕ, КОМПЛЕКСНОЕ И ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

На рис. 2.27 внешний относительно источника энергии пассивный участок цепи представлен в виде пассивного двухполюсника Π . Параметром такого пассивного двухполюсника является его входное комплексное сопротивление, т. е. комплексное сопротивление между выводами a и b :

$$\underline{Z} = \dot{E}/\dot{I} = \dot{U}/\dot{I} = z \angle \varphi = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx,$$

где $\dot{U} = U \angle \psi_u$ и $\dot{I} = I \angle \psi_i$ — комплексные значения напряжения и тока цепи; $\varphi = \psi_u - \psi_i$ — аргумент комплексного сопротивления, причем $|\varphi| \leq \pi/2$. Из полученного выражения следует, что любой пассивный двухполюсник можно представить эквивалентной схемой замещения, состоящей из последовательного соединения элемента с активным сопротивлением r и элемента с реактивным сопротивлением x . Полное сопротивление пассивного двухполюсника определяется по (2.49а). В зависимости от знака реактивного сопротивления x комплексное сопротивление пассивного двухполюсника имеет индуктивный ($x > 0$, рис. 2.26, *а*) или емкостный ($x < 0$, рис. 2.26, *б*) характер.

На рис. 2.28 для пассивного двухполюсника на рис. 2.27 построены векторные диаграммы, на которых $\dot{U}_a = r\dot{I}$ и $\dot{U}_p = jx\dot{I}$ — активная и реактивная составляющие напряжения $\dot{U}$ между выводами пассивного двухполюсника.

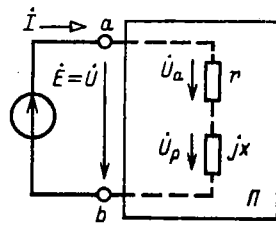


Рис. 2.27

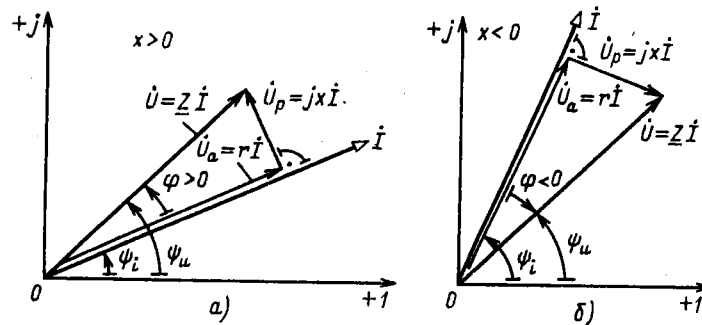


Рис. 2.28

Векторы комплексных напряжений $\dot{U}_a$, $\dot{U}_p$ и $\dot{U}$ образуют на комплексной плоскости *треугольник напряжений*: $\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_p$. Модуль вектора активной составляющей напряжения $U_a = U \cos \varphi$, и этот вектор совпадает по фазе с вектором тока $\dot{I}$. Модуль вектора реактивной составляющей напряжения $U_p = U |\sin \varphi|$, и этот вектор сдвинут по фазе относительно вектора тока $\dot{I}$ на угол $|\pi/2|$: *индуктивное реактивное напряжение опережает по фазе ток $\dot{I}$ на угол $\pi/2$* (рис. 2.8, а), *емкостное реактивное напряжение отстает по фазе от тока $\dot{I}$ на угол $\pi/2$* (рис. 2.28, б). Из треугольников напряжений следует, что

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

2.13. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЗИСТИВНОМ, ИНДУКТИВНОМ И ЕМКОСТНОМ ЭЛЕМЕНТАХ

Энергетические процессы в цепях синусоидального тока достаточно сложные, так как физические процессы в их различных элементах неодинаковы.

А. Резистивный элемент. В резистивном элементе с сопротивлением r при напряжении $u_r = U_{rm} \sin \omega t$ ток $i_r = u_r / r = I_{rm} \sin \omega t$, т. е. совпадает по фазе с напряжением. В любой момент времени мощность

резистивного элемента (мгновенное значение мощности)

$$p_r = u_r i_r = U_{rm} I_{rm} \sin^2 \omega t = \frac{U_{rm} I_{rm}}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

На рис. 2.29, а показаны мгновенные значения тока i_r , напряжения u_r и мощности p_r для резистивного элемента. Мгновенная мощность в резистивном элементе в любой момент времени положительная, т. е. в течение любого интервала времени в резистивный элемент поступает энергия и происходит необратимое преобразование электрической энергии источника в другие ее виды.

Средняя за период мощность, т. е. *активная мощность*, резистивного элемента

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt = U_r I_r = r I_r^2 = I_r^2 / g = g U_r^2 = U_r^2 / r, \quad (2.50)$$

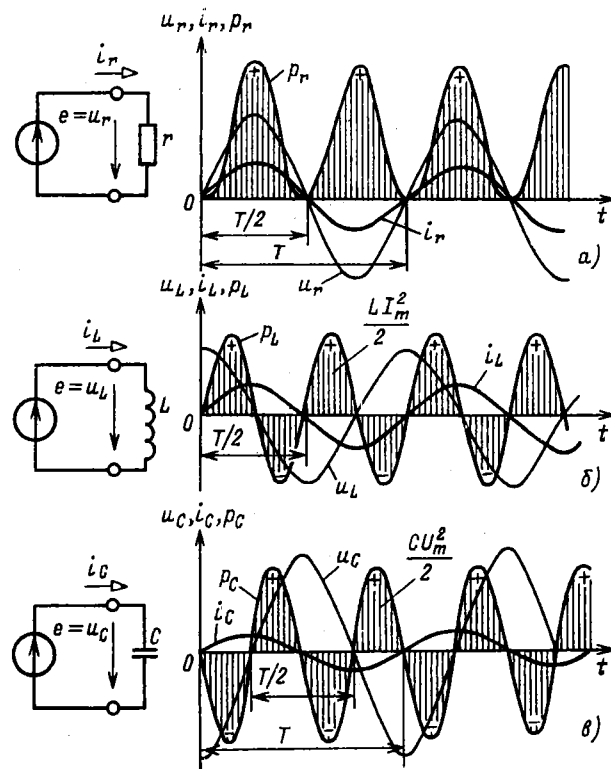


Рис. 2.29

где $U_r = U_{rm} / \sqrt{2}$ и $I_r = I_{rm} / \sqrt{2}$ — действующие значения напряжения и тока.

Б. Индуктивный элемент. Для индуктивного элемента L (рис. 2.29, б) напряжение

$$u_L = L di_L/dt = U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2) = U_{Lm} \cos \omega t$$

опережает по фазе ток $i_L = I_{Lm} \sin \omega t$ (нулевая начальная фаза выбрана у тока) на угол $\pi/2$. Мгновенная мощность индуктивного элемента

$$\begin{aligned} p_L &= u_L i_L = U_{Lm} I_{Lm} \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= \frac{U_{Lm} I_{Lm}}{2} \sin 2\omega t = U_L I_L \sin 2\omega t, \end{aligned}$$

т. е. изменяется по синусоидальному закону с частотой, в 2 раза большей частоты тока. Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению тока в индуктивном элементе (независимо от направления тока); в это время энергия накапливается в магнитном поле индуктивного элемента.

Определим энергию, поступающую в индуктивный элемент за четверть периода, в течение которого ток и мгновенная мощность положительны:

$$W_M = \int_0^{T/4} p_L dt = \int_0^{T/4} u_L i_L dt.$$

После подстановки мгновенного значения напряжения на индуктивном элементе $u_L = L di_L/dt$ и соответствующей замены переменных получим

$$W_M = \int_0^{I_{Lm}} Li_L di_L = LI_{Lm}^2 / 2. \quad (2.51)$$

В течение следующей четверти периода мгновенная мощность p_L отрицательна, т. е. индуктивный элемент не получает энергию от источника, а наоборот, источник получает энергию от индуктивного элемента.

Среднее значение мощности за период $P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt$ для индуктивного элемента равно нулю. Синусоидальный ток в индуктивном элементе не совершает работы. Поэтому в отличие от резистивного элемента энергетический режим индуктивного элемента принято определять не активной, а *реактивной индуктивной мощностью*, равной максимальному значению мгновенной мощности:

$$Q_L = U_L I_L = x_L I_L^2 = U_L^2 / x_L = b_L U_L^2 = I_L^2 / b_L. \quad (2.52)$$

Хотя единицы активной и реактивной индуктивной мощностей совпадают ($\text{В} \cdot \text{А}$), для измерения реактивной индуктивной мощности выбрана своя единица: *вольт-ампер реактивный* (вар).

В. Емкостный элемент. В емкостном элементе C (рис. 2.29, в) напряжение

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt = U_{Cm} \sin(\omega t - \pi/2) = -U_{Cm} \cos \omega t$$

отстает по фазе от тока $i_C = I_{Cm} \sin \omega t$ на угол $\pi/2$. Мгновенная мощность емкостного элемента

$$\begin{aligned} p_C &= u_C i_C = -U_{Cm} I_{Cm} \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= -\frac{U_{Cm} I_{Cm}}{2} \sin 2\omega t = -U_C I_C \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

В емкостном элементе, так же как и в индуктивном, мгновенная мощность — синусоидальная величина, частота которой вдвое больше частоты тока. Но в емкостном элементе мгновенная мощность положительна в те интервалы времени, в течение которых напряжение возрастает по абсолютному значению. В течение этих интервалов времени происходит зарядка емкостного элемента и в его электрическом поле накапливается энергия. При уменьшении по абсолютному значению напряжения на емкостном элементе мгновенная мощность отрицательна. Емкостный элемент разряжается и энергия, запасенная в его электрическом поле, возвращается источнику.

К концу первой четверти периода энергия электрического поля $W_3 = \int_0^{T/4} p_C dt = \int_0^{T/4} u_C i_C dt$ достигает максимального значения.

После подстановки мгновенного значения тока в емкостном элементе $i_C = C du_C/dt$ и соответствующей замены переменных получим

$$W_3 = \int_{-U_{Cm}}^0 C u_C du_C = C U_{Cm}^2 / 2. \quad (2.53)$$

В емкостном элементе, так же как и в индуктивном, синусоидальный ток не совершает работы.

Энергетический режим емкостного элемента принято определять *реактивной емкостной мощностью*, равной максимальному значению мгновенной мощности:

$$Q_C = U_C I_C = x_C I_C^2 = I_C^2 / b_C = U_C^2 / x_C = b_C U_C^2. \quad (2.54)$$

Если индуктивный и емкостный элементы соединены последовательно, т. е. $i_L = i_C = i$, то, как видно из сопоставления рис. 2.29, б и в, в моменты времени, когда энергия магнитного поля индуктивного элемента увеличивается, энергия электрического поля емкостного элемента уменьшается, и наоборот. Следовательно, эти элементы могут обмениваться энергией не только с источниками, но и друг с другом.

2.14. АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ, КОМПЛЕКСНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ ПАСИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Разнообразие физических явлений в элементах цепей синусоидального тока усложняет задачу формализации методов анализа энергетических процессов. Определим мгновенную мощность пассивного двухполюсника, который подключен к источнику ЭДС, так что его мгновенная мощность равна мгновенной мощности источника (рис. 2.30, а) при напряжении и токе:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\psi_u - \psi_i) + \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)]. \end{aligned}$$

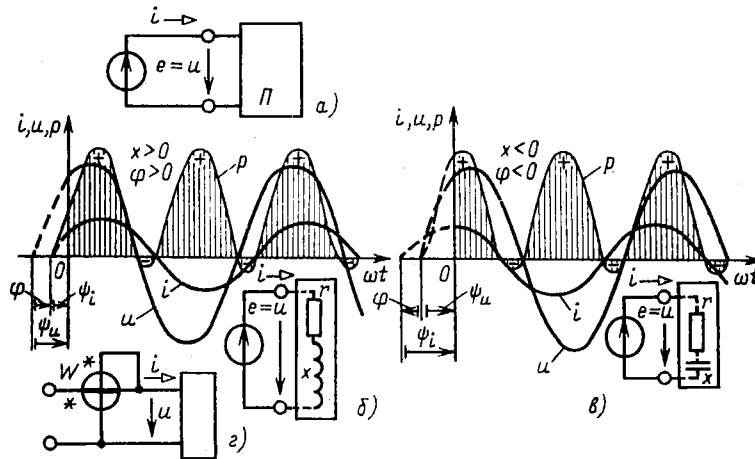


Рис. 2.30

Мгновенные значения тока, напряжения и мощности при индуктивном ($x > 0, \varphi = \psi_u - \psi_i > 0$) и емкостном ($x < 0, \varphi = \psi_u - \psi_i < 0$) характере комплексного сопротивления двухполюсника показаны на рис. 2.30, б и в соответственно.

Энергетический процесс в обоих случаях складывается из уже рассмотренных выше (см. § 2.13) энергетических процессов для идеальных элементов. Часть электрической энергии источника поступает в двухполюсник и преобразуется в другие формы энергии. Другой частью энергии источник и двухполюсник периодически обмениваются.

Из (2.54) следует, что средняя мощность пассивного двухполюсника за период (равная средней мощности источника)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\psi_u - \psi_i) = UI \cos \varphi, \quad (2.55)$$

так как среднее значение за период косинусоиды двойной частоты равно нулю.

Угол сдвига фаз между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i$ зависит от параметров r и x элементов эквивалентной схемы замещения пассивного двухполюсника (см. рис. 2.27).

Выражение (2.55) определяет *активную мощность двухполюсника* и источника, которая зависит от действующих значений напряжения и тока, а также от $\cos \varphi$ — *коэффициента мощности*. Отметим, что активная мощность пассивного двухполюсника всегда положительна и не зависит от знака угла φ (напомним, что $|\varphi| \leq \pi/2$). Она определяет энергетический режим пассивного двухполюсника в целом, т. е. среднюю скорость необратимого преобразования энергии во всех резистивных элементах пассивного двухполюсника.

Активную мощность двухполюсника можно измерить ваттметром (рис. 2.30, з). У ваттметра две измерительные цепи, одна из которых включается последовательно с двухполюсником, т. е. ток в этой цепи равен току i двухполюсника, а вторая — параллельно с двухполюсником (на его выводы), т. е. напряжение на этой цепи равно напряжению u двухполюсника. Чтобы учесть знак угла сдвига фаз φ между напряжением и током двухполюсника, измерительные цепи должны быть включены аналогично относительно положительных направлений тока и напряжения, поэтому один из выводов каждой измерительной цепи имеет отличительное обозначение (звездочка на рис. 2.30, з).

Из треугольников сопротивлений (рис. 2.26) и напряжений (рис. 2.28) пассивного двухполюсника следует, что коэффициент мощности

$$\cos \varphi = r/z = U_a/U.$$

После замены $\cos \varphi$ в (2.55) получим другие выражения для актив-

ной мощности пассивного двухполюсника:

$$P = U_a I = r I^2. \quad (2.56)$$

Произведение действующих значений напряжения между выводами источника $U = E$ и тока источника I в (2.55) определяет так называемую *полную мощность* источника, равную полной мощности пассивного двухполюсника:

$$S = UI = EI = z I^2. \quad (2.57)$$

Размерности активной мощности и полной мощности совпадают, но для измерения полной мощности выбрана своя единица: *вольт-ампер* ($V \cdot A$).

Полная мощность определяет эксплуатационные возможности многих электротехнических устройств (генераторов, трансформаторов, электрических машин и др.), для которых она указывается в качестве номинальной: $S_{\text{ном}} = U_{\text{ном}} I_{\text{ном}}$. Например, для генератора электрической энергии номинальная полная мощность равна его максимальной активной мощности, которая может быть получена при $\cos \varphi = 1$.

Процесс обмена энергией между источником энергии и совокупностью индуктивных и емкостных элементов пассивного двухполюсника отображается его *реактивной мощностью*, равной реактивной мощности источника:

$$Q = EI \sin \varphi = UI \sin \varphi = UI \sin(\psi_u - \psi_i).$$

Из треугольников сопротивлений пассивного двухполюсника (см. рис. 2.26) следует, что $\sin \varphi = x/z$, т. е. с учетом (2.47) реактивная мощность пассивного двухполюсника

$$Q = UI \sin \varphi = x I^2. \quad (2.58)$$

При индуктивном характере входного сопротивления двухполюсника ($\varphi > 0$) реактивная мощность положительная, а при емкостном характере ($\varphi < 0$) отрицательная.

Сравнивая формулы (2.56)–(2.58), нетрудно установить связь активной, реактивной и полной мощностей пассивного двухполюсника:

$$S^2 = U^2 I^2 = (UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2 = P^2 + Q^2. \quad (2.59)$$

Соотношение (2.59) удобно интерпретировать геометрически на комплексной плоскости. Для этого умножим все стороны треугольников сопротивлений (см. рис. 2.26) пассивного двухполюсника на I^2 . Вновь полученные треугольники называются *треугольниками мощностей* (рис. 2.31, а, б). Из подобия треугольников сопротивлений и мощностей следует, что

$$Q/P = x/r = \operatorname{tg} \varphi.$$

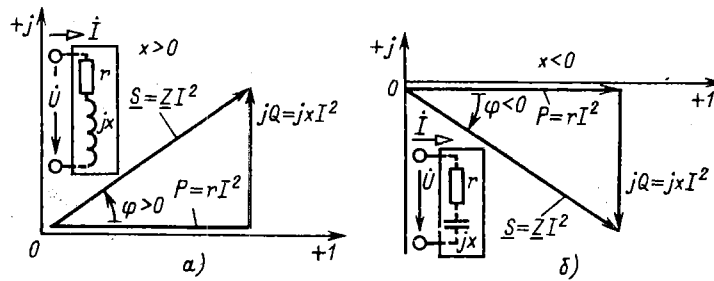


Рис. 2.31

Стороны треугольника мощностей связаны между собой зависимостью

$$\underline{S} = P + jQ = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = UI e^{j\varphi} = \dot{U} \dot{I}^*. \quad (2.60)$$

Здесь $\underline{S}$ — комплексная мощность или комплекс полной мощности пассивного двухполюсника; $\dot{I}^*$ — комплексное сопряженное значение тока $\dot{I}$. Модуль комплексной мощности равен полной мощности пассивного двухполюсника:

$$|\underline{S}| = S = UI.$$

2.15. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ВЕТВЕЙ

На рис. 2.32 представлена схема замещения цепи с параллельным соединением источника ЭДС $\dot{E} = \dot{U} = U \angle \psi_u$ резистивного, индуктивного и емкостного элементов, комплексные проводимости которых соответственно равны $g = 1/r$, $-jb_L = 1/j\omega L$ и $jb_C = j\omega C$.

По первому закону Кирхгофа определим комплексное значение общего тока, равного току источника ЭДС:

$$\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C = (g - jb_L + jb_C) \dot{U} = \underline{Y} \dot{U}, \quad (2.61)$$

где учтено, что по закону Ома $\dot{I}_r = g \dot{U}$, $\dot{I}_L = -jb_L \dot{U}$, $\dot{I}_C = jb_C \dot{U}$ — комплексы токов в резистивном, индуктивном и емкостном элементах;

$$\underline{Y} = \frac{1}{r} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = g - jb_L + jb_C = g - j(b_L - b_C). \quad (2.62)$$

— комплексная проводимость цепи.

Обратная величина комплексной проводимости $1/\underline{Y} = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ — это комплексное сопротивление. Поэтому в показательной форме

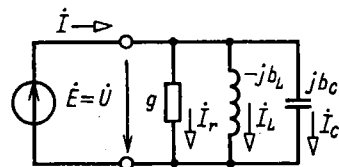


Рис. 2.32

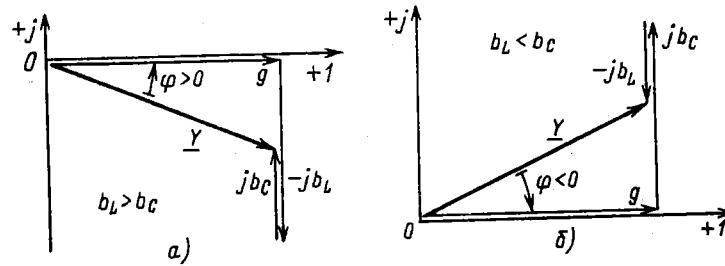


Рис. 2.33

комплексная проводимость

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} \quad (2.63a)$$

и в тригонометрической форме

$$\underline{Y} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi, \quad (2.63б)$$

где $y = |\underline{Y}| = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}$ — модуль комплексной проводимости цепи или *полная проводимость* цепи; $\varphi = \arctg(b_L - b_C)/g$ — аргумент комплексной проводимости цепи.

На комплексной плоскости (рис. 2.33) слагаемые комплексной проводимости цепи изображены в виде векторов для двух случаев: $b_L > b_C$ (рис. 2.33, а) и $b_L < b_C$ (рис. 2.33, б). В первом случае комплексная проводимость цепи имеет индуктивный характер, во втором — емкостный.

Подставив значение комплексной проводимости цепи в показательной форме (2.63) в (2.61), получим комплексное значение тока в виде

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = \underline{Y} \dot{E} = \underline{Y} \dot{U} = y U e^{j(\psi_u - \varphi)}. \quad (2.64)$$

Из (2.64) следует, что действующее значение тока в неразветвленной части цепи

$$I = yU = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} U.$$

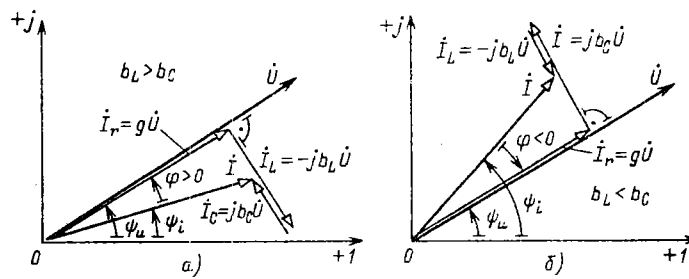


Рис. 2.34

На рис. 2.34 приведены векторные диаграммы напряжения и токов рассматриваемой цепи для двух случаев: $b_L > b_C$ (рис. 2.34, а) и $b_L < b_C$ (рис. 2.34, б) при одинаковом напряжении $\dot{U} = U \angle \psi_u$. Если комплексная проводимость цепи имеет индуктивный характер, то общий ток (в неразветвленной части цепи) отстает по фазе от напряжения, так как $\varphi > 0$, т. е. $\psi_u < \psi_i$. Если комплексная проводимость цепи имеет емкостный характер, то общий ток опережает по фазе напряжение, так как $\varphi < 0$, т. е. $\psi_u > \psi_i$. Заметим (см. рис. 2.25), что положительные значения угла φ отсчитываются против направления движения стрелки часов от вектора комплексного значения тока $\dot{I}$.

Комплексная мощность параллельного соединения пассивных элементов равна комплексной мощности источника ЭДС:

$$\begin{aligned} \underline{S} = \dot{U}\dot{I}^* &= \dot{U}(\dot{I}_r^* + \dot{I}_L^* + \dot{I}_C^*) = gU^2 + jb_L U^2 - jb_C U^2 = \\ &= \underline{Y}^* U^2 = P + j(Q_L - Q_C) = P + jQ. \end{aligned}$$

Если включены параллельно несколько резистивных, индуктивных и емкостных элементов, то комплексная проводимость

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= ye^{-j\varphi} = \Sigma G - j\Sigma b_L + j\Sigma b_C = \\ &= \Sigma G - j(\Sigma b_L - \Sigma b_C) = g - jb, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где $g = \Sigma G$ — активная проводимость цепи; $b = \Sigma b_L - \Sigma b_C$ — реактивная проводимость цепи. Такие названия проводимостей даны по аналогии с названиями сопротивлений для неразветвленной цепи [см. (2.48)].

Введенные здесь понятия об активной и реактивной проводимостях цепи применяются и для характеристики пассивных двухполюсников.

Выражению (2.65) соответствуют треугольники проводимостей на комплексной плоскости (рис. 2.35, а, б). Из треугольников проводимостей и из (2.65) следуют тригонометрическая и показательная фор-

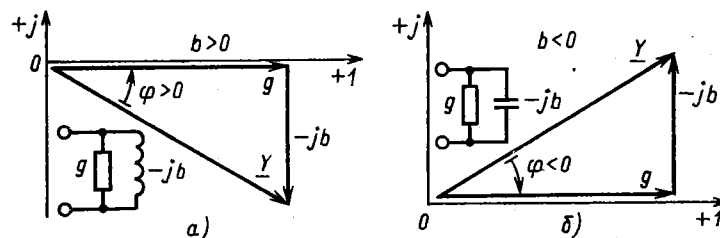


Рис. 2.35

мы комплексной проводимости цепи при произвольном числе параллельных ветвей с резистивными, индуктивными и емкостными элементами, совпадающие с (2.63), причем полная проводимость

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (2.66a)$$

и аргумент

$$\varphi = \arctg(b/g). \quad (2.66б)$$

В общем случае параллельные ветви могут содержать последовательные соединения резистивных, индуктивных и емкостных элементов. Комплексная проводимость цепи с параллельным соединением n таких ветвей равна сумме комплексных проводимостей всех ветвей:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\underline{Z}_k} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}, \end{aligned}$$

где $\underline{Y}_k$ и $\underline{Z}_k$ — комплексные проводимость и сопротивление k -й ветви.

2.16. АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ, КОМПЛЕКСНАЯ И ПОЛНАЯ ПРОВОДИМОСТИ ПАСИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Выше (см. § 2.12) пассивный двухполюсник был представлен эквивалентной схемой замещения, состоящей из последовательного соединения элементов с активным и реактивным сопротивлениями (см. рис. 2.27). Однако решение многих задач будет проще, если пассивный двухполюсник представить другой эквивалентной схемой, состоящей из параллельного соединения элементов с активной и реактивной проводимостями (рис. 2.36). Параметром такого пассивного двухпо-

люсника является его входная комплексная проводимость между выводами a и b :

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}}{\dot{E}} = y e^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb, \quad (2.67)$$

где $\dot{U} = U \angle \psi_u = \dot{E}$ и $\dot{I} = I \angle \psi_i$ — комплексные значения напряжения и тока на входе двухполюсника; $-\varphi = \psi_i - \psi_u$ — аргумент комплексной проводимости. Из (2.67) следует, что любой пассивный двухполюсник можно представить схемой замещения, состоящей из параллельного соединения элементов с активной проводимостью g и реактивной проводимостью b . Элемент с активной проводимостью — это всегда резистивный элемент с проводимостью g , а элемент с реактивной проводимостью — это индуктивный элемент с индуктивной проводимостью $b_L = 1/\omega L = b$, если $b > 0$, или емкостный элемент с емкостной проводимостью $b_C = \omega C = |b|$, если $b < 0$.

В зависимости от знака реактивной проводимости b комплексная проводимость пассивного двухполюсника имеет индуктивный ($b > 0$ для рис. 2.35, а) или емкостный ($b < 0$ для рис. 2.35, б) характер.

Умножив проводимости всех сторон треугольника проводимостей (рис. 2.35) на комплексное значение напряжения $\dot{U} = U \angle \psi_u$, построим векторную диаграмму токов (рис. 2.37) для эквивалентной схемы замещения пассивного двухполюсника, где $\dot{I}_a = g\dot{U}$ и $\dot{I}_p = -jb\dot{U}$ — активная и реактивная составляющие тока $\dot{I}$. Векторы комплексных значений $\dot{I}_a$, $\dot{I}_p$ и $\dot{I}$ образуют на комплексной плоскости треугольник токов:

$$\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_p. \quad (2.68)$$

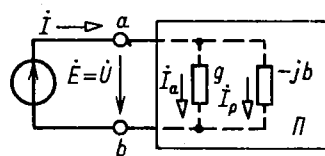


Рис. 2.36

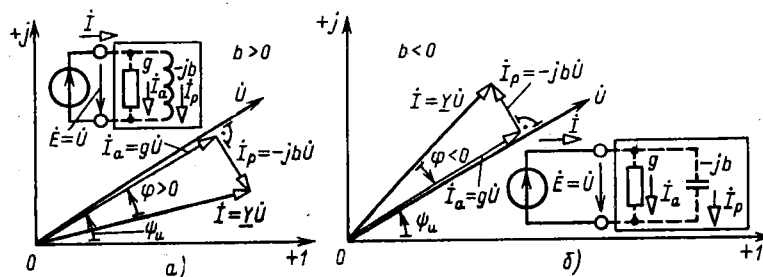


Рис. 2.37

Модуль вектора активной составляющей тока $I_a = I \cos \varphi$, причем активная составляющая тока совпадает по фазе с напряжением. Модуль вектора реактивной составляющей тока $I_p = I |\sin \varphi|$; вектор I_p образует с вектором напряжения $\dot{U}$ угол $|\pi/2|$. Индуктивный реактивный ток отстает по фазе от напряжения на угол $\pi/2$ (рис. 2.37, а). Емкостный реактивный ток опережает по фазе напряжение на угол $\pi/2$ (рис. 2.37, б).

Из треугольников токов следует, что

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Учитывая соотношения (2.67) и (2.68), получим различные математические выражения комплексной мощности пассивного двухполюсника (2.60):

$$\begin{aligned} \underline{S} &= P + jQ = \dot{U} \dot{I}^* = \dot{U} (\dot{I}_a^* + \dot{I}_p^*) = \\ &= Y^* U^2 = gU^2 + jbU^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

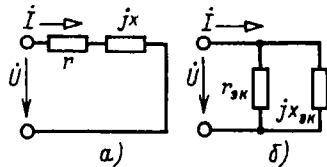
2.17. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ

В схемах замещения цепей синусоидального тока иногда необходимо преобразовать последовательное соединение элементов в эквивалентное параллельное, чтобы упростить анализ некоторых электротехнических устройств, например катушки индуктивности с магнитопроводом (см. гл. 8).

Предположим, что задано последовательное соединение резистивного элемента с сопротивлением r и элемента с реактивным сопротивлением x (рис. 2.38, а). Комплексное сопротивление и проводимость соединения соответственно равны

$$\underline{Z} = r + jx;$$

$$\begin{aligned} \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - \\ &- j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb. \end{aligned} \quad (2.70)$$



Параллельное соединение элементов (рис. 2.38, б) будет эквивалентно последовательному (рис. 2.38, а), если комплексные проводимости или со-

Рис. 2.38

противления обоих соединений одинаковые, т. е.

$$g_{\text{ЭК}} = \frac{1}{r_{\text{ЭК}}} = g = \frac{r}{r^2 + x^2}; \quad (2.71a)$$

$$-jb_{\text{ЭК}} = \frac{1}{jx_{\text{ЭК}}} = -jb = -j \frac{x}{r^2 + x^2}. \quad (2.71b)$$

Из (2.71) следует, что сопротивления элементов, соединенных параллельно, выражаются следующим образом через сопротивления элементов, соединенных последовательно:

$$r_{\text{ЭК}} = \frac{r^2 + x^2}{r}; \quad x_{\text{ЭК}} = \frac{r^2 + x^2}{x}. \quad (2.72)$$

Выразив из (2.72) сопротивления элементов, соединенных последовательно, получим условия обратного эквивалентного преобразования.

2.18. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ СО СМЕШАННЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Последовательность расчета общего сопротивления смешанного соединения в цепях синусоидального тока такая же, как и в цепях постоянного тока (см. § 1.9): сначала рассчитывается эквивалентное сопротивление ветвей, соединенных параллельно, а затем после замены параллельных ветвей элементов с эквивалентным сопротивлением — сопротивление полученного последовательного соединения.

В качестве примера рассмотрим цепь на рис. 2.39, а. Определим сначала эквивалентное комплексное сопротивление двух параллельных ветвей, включенных между узлами *a* и *b*:

$$\underline{Z}_{\text{ЭК}} = r_{\text{ЭК}} + jx_{\text{ЭК}} = z_{\text{ЭК}} e^{j\varphi_{\text{ЭК}}} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2),$$

где

$$\underline{Z}_1 = r_1 - jx_{C1} = z_1 e^{j\varphi_1}; \quad \underline{Z}_2 = r_2 + jx_{L2} = z_2 e^{j\varphi_2}$$

— комплексные сопротивления параллельных ветвей.

Общее сопротивление цепи между выводами *c* и *d*

$$\underline{Z} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{\text{ЭК}},$$

где

$$\underline{Z}_3 = r_3 + jx_{L3} = z_3 e^{j\varphi_3}.$$

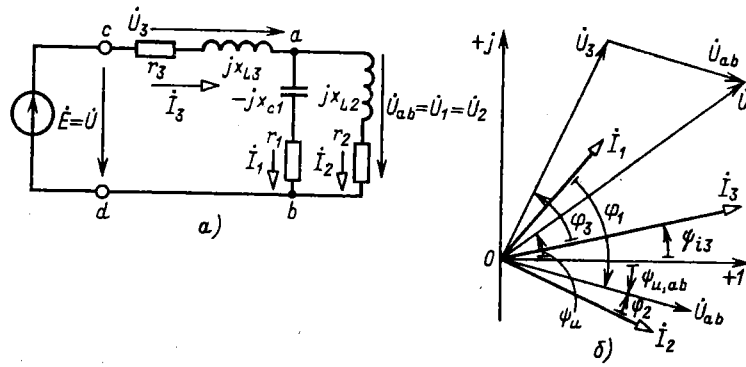


Рис. 2.39

Комплексные значения тока $\dot{I}$ и напряжений на участках

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{r_3 + r_{\text{эк}} + j(x_{L3} + x_{\text{эк}})} = I_3 e^{j\psi_{i3}};$$

$$\dot{U}_3 = Z_3 \dot{I}_3 = z_3 e^{j\varphi_3} I_3 e^{j\psi_{i3}} = U_3 e^{j\psi_{u3}};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_{ab} = Z_{\text{эк}} \dot{I}_3 = z_{\text{эк}} e^{j\varphi_{\text{эк}}} I_3 e^{j\psi_{i3}} = U_{ab} e^{j\psi_{u,ab}}.$$

Применив закон Ома, найдем комплексные значения в каждой параллельной ветви:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_1} = \frac{U_{ab} e^{j\psi_{u,ab}}}{z_1 e^{j\varphi_1}} = I_1 e^{j\psi_{i1}};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{U_{ab} e^{j\psi_{u,ab}}}{z_2 e^{j\varphi_2}} = I_2 e^{j\psi_{i2}}.$$

На рис. 2.39, б приведена векторная диаграмма токов и напряжений анализируемой цепи.

Комплексная мощность источника ЭДС равна сумме комплексных мощностей всех пассивных ветвей:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \dot{U} \dot{I}_3^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{I}_2^* + \dot{U}_3 \dot{I}_3^* = \\ &= P_1 + P_2 + P_3 + j(-Q_{C1} + Q_{L2} + Q_{L3}) = \\ &= r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 + j(-x_{C1} I_1^2 + x_{L2} I_2^2 + x_{L3} I_3^2). \end{aligned}$$

2.19. БАЛАНС МОЩНОСТИ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В любой момент времени алгебраическая сумма мгновенных мощностей всех источников энергии равна алгебраической сумме мгновенных мощностей всех приемников энергии. То же самое можно сказать и относительно средних значений мощностей за период.

Рассмотрим сначала приемники энергии, схемы замещения которых содержат резистивные, индуктивные и емкостные элементы. Энергетические процессы в резистивных, индуктивных и емкостных элементах различны по физической природе. В резистивных элементах происходит необратимое преобразование электрической энергии в другие виды энергии. Средняя скорость необратимого процесса преобразования энергии в резистивном элементе определяется активной мощностью P_r [см. (2.50)]. В индуктивных и емкостных элементах происходит периодическое аккумулирование энергии в магнитных и электрических полях, а затем энергия возвращается во внешнюю относительно этих элементов часть цепи. В таких элементах нет необратимого преобразования электрической энергии в другие виды, т. е. активная мощность P равна нулю. Электрические процессы в индуктивном и емкостном элементах определяются реактивной индуктивной мощностью Q_L [см. (2.52)] и реактивной емкостной мощностью Q_C [см. (2.53)].

Баланс мощности в электрической цепи синусоидального тока, содержащей произвольное число источников энергии, т. е. источников тока и источников ЭДС (напряжения), и приемников энергии, т. е. резистивных, индуктивных и емкостных элементов, означает, что, во-первых, алгебраическая сумма активных мощностей всех источников энергии равна арифметической сумме мощностей всех резистивных элементов:

$$\sum U_{\text{ист}} I_{\text{ист}} \cos(\psi_u - \psi_i) = \sum r I_r^2$$

или

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_r; \quad (2.73)$$

во-вторых, алгебраическая сумма реактивных мощностей всех источников энергии равна разности между арифметической суммой реактивных мощностей всех индуктивных элементов и арифметической суммой реактивных мощностей всех емкостных элементов:

$$\sum U_{\text{ист}} I_{\text{ист}} \sin(\psi_u - \psi_i) = \sum x_L I_L^2 - \sum x_C I_C^2,$$

или

$$\sum Q_{\text{ист}} = \sum Q_L - \sum Q_C. \quad (2.74)$$

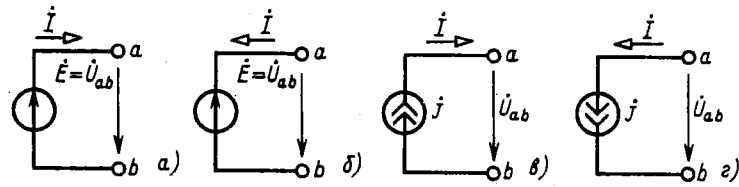


Рис. 2.40

Слагаемое алгебраической суммы активных или реактивных мощностей источника ЭДС (рис. 2.40, а) записывается со знаком плюс, если положительное направление тока $\dot{I}$ совпадает с направлением действия ЭДС $\dot{E} = \dot{U}_{ab}$. В противном случае (рис. 2.40, б) слагаемое записывается со знаком минус (например, генератор синусоидальной ЭДС, работающий в режиме двигателя). Аналогично для источника тока $\dot{J} = \dot{I}$ (рис. 2.40, в) слагаемое записывается со знаком плюс и в противном случае (рис. 2.40, г) — со знаком минус.

Баланс мощности в электрических цепях синусоидального тока можно выразить в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексных мощностей всех источников энергии равна алгебраической сумме комплексных мощностей всех приемников энергии:

$$\sum \underline{S}_{\text{ист}} = \sum \dot{U}_{\text{ист}} \dot{I}_{\text{ист}}^* = \sum \underline{S}_{\text{пот}} = \sum \dot{U}_{\text{пот}} \dot{I}_{\text{пот}}^* \quad (2.75)$$

Знаки слагаемых алгебраической суммы комплексных мощностей источников энергии выбираются по тому же правилу, что и для их активных и реактивных мощностей.

Для приемников энергии слагаемые записываются со знаком плюс (минус), если положительные направления напряжения $\dot{U}_{\text{пот}}$ и тока $\dot{I}_{\text{пот}}$ совпадают (противоположны).

В общем случае в качестве приемников энергии можно рассматривать не отдельные элементы, а ветви цепей или двухполюсники.

В качестве примера составим баланс мощности цепи на рис. 2.41:

$$\begin{aligned} \sum \underline{S}_{\text{ист}} &= \dot{U}_1 \dot{I}_1^* - \dot{U}_2 \dot{I}_2^* + \dot{U}_{ab} \dot{J}^* = \\ &= \dot{E}_1 \dot{I}_1^* - \dot{E}_2 \dot{I}_2^* - \dot{U}_{L3} \dot{J}^* = \sum P_{\text{ист}} + j \sum Q_{\text{ист}} \end{aligned}$$

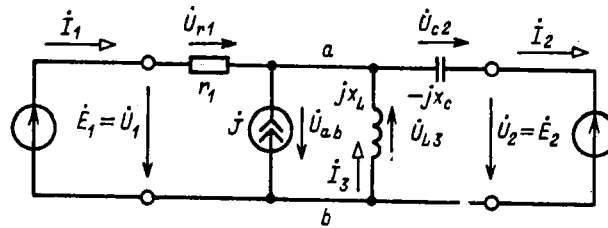


Рис. 2.41

$$\begin{aligned}\Sigma \underline{S}_{\text{пот}} &= \dot{U}_{r1} \dot{I}_1^* + \dot{U}_{C2} \dot{I}_2^* + \dot{U}_{L3} \dot{I}_3^* = \\ &= r_1 I_1^2 - jx_C I_2^2 + jx_L I_3^2 = P_r + j(Q_L - Q_C); \\ \Sigma P_{\text{ист}} &= P_r; \quad \Sigma Q_{\text{ист}} = Q_L - Q_C.\end{aligned}$$

2.20. ПОВЫШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА МОЩНОСТИ

Многие электротехнические устройства синусоидального тока (фазовращатели, двигатели и др.) имеют сильные магнитные поля. У таких устройств велика реактивная (индуктивная) составляющая тока (см. рис. 2.37, а), т. е. большой положительный угол сдвига фаз φ между напряжением и током, что ухудшает их коэффициент мощности $\cos \varphi$, а значит, и коэффициент мощности промышленного предприятия в целом. Низкое значение $\cos \varphi$ приводит к неполному использованию генераторов, линий передачи и другого электротехнического оборудования, которое бесполезно загружается реактивным (индуктивным) током. Эта составляющая тока обуславливает также увеличение потерь электрической энергии во всех токопроводящих частях (обмотках двигателей, трансформаторов, генераторов, проводах линий передачи и др.).

Чтобы увеличить значение $\cos \varphi$, необходимо включить параллельно приемнику со значительной реактивной (индуктивной) составляющей тока батарею конденсаторов. Реактивный (емкостный) ток батареи конденсаторов I_C компенсирует реактивный (индуктивный) ток приемника.

Представим приемник в виде эквивалентной схемы замещения пассивного двухполюсника (рис. 2.42, а). Компенсация реактивного (индуктивного) тока приемника (тока нагрузки) $I_{p.n}$ при помощи батареи конденсаторов показана на векторной диаграмме (рис. 2.42, б), из которой видно, что коэффициент мощности после включения бата-

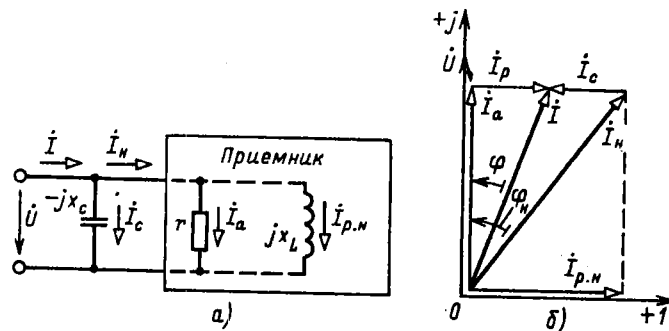


Рис. 2.42

реи конденсаторов увеличивается: $\cos \varphi > \cos \varphi_n$. В большинстве случаев допустима неполная компенсация сдвига фаз.

Если ток нагрузки I_n и коэффициент мощности приемника $\cos \varphi_n$ известны и задано требуемое значение $\cos \varphi$ после компенсации, то необходимое значение емкости конденсатора можно определить при помощи векторной диаграммы токов (рис. 2.42, б), из которой следует, что

$$I_a \operatorname{tg} \varphi_n - I_a \operatorname{tg} \varphi = I_C = \omega C U,$$

откуда

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi),$$

где $P = I_a U$ — активная мощность приемника.

Улучшение $\cos \varphi$ посредством включения конденсаторов называется искусственным улучшением коэффициента мощности в отличие от естественного улучшения, получаемого при полном использовании мощности двигателей и установке таких двигателей (синхронных), у которых реактивный ток очень мал.

2.21. РЕЗОНАНС В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

При подключении колебательного контура, состоящего из катушки индуктивности и конденсатора, к источнику энергии (источнику синусоидальной ЭДС или синусоидального тока) могут возникнуть резонансные явления. Возможны два основных типа резонанса: при последовательном соединении катушки и конденсатора — резонанс напряжений, при их параллельном соединении — резонанс токов.

А. Резонанс напряжений. Резонанс напряжений возможен в неразветвленном участке цепи, схема замещения которого содержит индуктивный L , емкостный C и резистивный r элементы, т. е. в последовательном колебательном контуре (рис. 2.43).

По закону Ома комплексное значение тока в контуре

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U e^{j\psi_u}}{z e^{j\varphi}}, \quad (2.76a)$$

где $Z = r + j\omega L - j1/\omega C$ и $z = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ — комплексное и полное сопротивление контура;

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{r} \quad (2.76b)$$

— угол сдвига фаз между напряжением и током, т. е. аргумент комплексного сопротивления;

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (2.76в)$$

— действующее значение тока.

Режим работы неразветвленного участка цепи, содержащей индуктивный, емкостный и резистивный элементы последовательного контура, при котором ее ток и напряжение совпадают по фазе, т. е.

$$\psi_i = \psi_u, \quad (2.77)$$

называется *резонансом напряжений*.

Название "резонанс напряжений" отражает равенство действующих значений напряжений на емкостном и индуктивном элементах при противоположных фазах, что видно из векторной диаграммы на рис. 2.44, на которой начальная фаза тока выбрана равной нулю.

Из соотношения (2.76б) и условия (2.77) следует, что угловая частота, при которой наблюдается резонанс напряжений, определяется равенством

$$\omega_{\text{рез}} L = 1/(\omega_{\text{рез}} C),$$

т. е.

$$\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC},$$

и называется *резонансной*.

При резонансе напряжений ток в цепи достигает наибольшего значения $I_{\text{рез}} = U/r$, а напряжения на емкостном и индуктивном элементах

$$U_{L \text{ рез}} = U_{C \text{ рез}} = \omega_{\text{рез}} L I_{\text{рез}} = U \omega_{\text{рез}} L / r$$

могут (и во много раз) превысить напряжение питания, если

$$\omega_{\text{рез}} L = 1/\omega_{\text{рез}} C = \sqrt{L/C} > r.$$

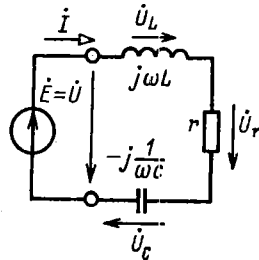


Рис. 2.43

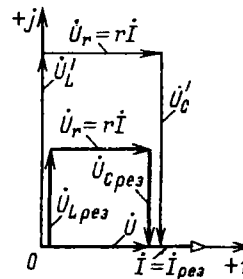


Рис. 2.44

Величина $\rho = \sqrt{L/C} = \omega_{\text{рез}} L = 1/\omega_{\text{рез}} C$ имеет размерность сопротивления и называется *характеристическим сопротивлением* колебательного контура. Отношение напряжения на индуктивном или емкостном элементе при резонансе к напряжению U на выводах контура, равное отношению характеристического сопротивления к сопротивлению резистивного элемента, определяет резонансные свойства колебательно-го контура и называется *добротностью контура*:

$$Q = \frac{U_{L \text{ рез}}}{U} = \frac{U_{C \text{ рез}}}{U} = \frac{\rho I'}{rI} = \frac{\sqrt{L/C}}{r}$$

Если при резонансе увеличить в одинаковое число раз n индуктивное и емкостное сопротивления, т. е. выбрать

$$x'_L = nx_{L \text{ рез}} \quad \text{и} \quad x'_C = nx_{C \text{ рез}},$$

то ток в цепи не изменится, а напряжения на индуктивном и емкостном элементах увеличатся в n раз (рис. 2.44, б): $U'_L = nU_{L \text{ рез}}$ и $U'_C = nU_{C \text{ рез}}$. Следовательно, в принципе можно безгранично увеличивать напряжения на индуктивном и емкостном элементах при том же токе: $I = I_{\text{рез}} = U/r$.

Физическая причина возникновения повышенных напряжений — это колебания значительной энергии, запасаемой попеременно в электрическом поле емкостного и в магнитном поле индуктивного элементов.

При резонансе напряжений малые количества энергии, поступающей от источника и компенсирующей потери энергии в активном сопротивлении, достаточны для поддержания незатухающих колебаний в системе относительно больших количеств энергии магнитного и электрического полей. Покажем, что при резонансе в любой момент времени суммарная энергия электрического и магнитного полей

$$w_3 + w_m = Cu_C^2/2 + Li^2/2$$

остается постоянной.

Между напряжением на емкостном элементе u_C и током i сдвиг фаз равен четверти периода, поэтому если $u_C = U_{Cm} \sin \omega t$, то $i = I_m \cos \omega t$. Подставив эти выражения в предыдущее уравнение, получим

$$w_3 + w_m = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Амплитуда тока $I_m = \omega CU_{Cm}$, а при резонансе $\omega = \omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$, т. е. $LI_m^2 = CU_{Cm}^2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} w_z + w_m &= \frac{CU_{cm}^2}{2} (\sin^2 \omega_{рез} t + \cos^2 \omega_{рез} t) = \\ &= \frac{CU_{cm}^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const.} \end{aligned}$$

В аппаратуре связи, автоматики и т. д. большое практическое значение имеют зависимости токов и напряжений от частоты для цепей, в которых возможен резонанс. Эти зависимости называются *резонансными кривыми*.

Выражение (2.76в) показывает, что ток в цепи зависит от угловой частоты $I(\omega)$ и достигает наибольшего значения при резонансе, т. е. при $\omega = \omega_{рез}$ и $\omega_{рез} L = 1/\omega_{рез} C$ (рис. 2.45).

Полное сопротивление идеального последовательного контура ($r = 0$) при резонансе равно нулю (короткое замыкание для источника питания).

Наибольшие значения напряжений на индуктивном и емкостном элементах получаются при угловых частотах, несколько отличающихся от резонансной. Так, напряжение на емкостном элементе

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{1}{\omega C} I = \frac{1}{\omega C} \frac{U}{z} = \frac{U}{\omega C \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \\ &= \frac{U}{\sqrt{\omega^2 r^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}. \end{aligned}$$

Наибольшему значению $U_C(\omega)$ соответствует угловая частота ω_C , при которой значение подкоренного выражения в последней формуле минимально. Следовательно, для определения угловой частоты ω_C нужно приравнять нулю первую производную от подкоренного выражения по ω :

$$2\omega r^2 C^2 + 4\omega^3 L^2 C^2 - 4\omega LC = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \omega_C &= \sqrt{1/(LC) - r^2/(2L^2)} = \\ &= \omega_{рез} \sqrt{1 - 1/(2Q^2)} < \omega_{рез}. \end{aligned}$$

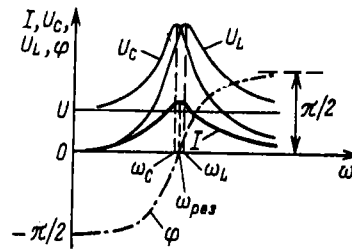


Рис. 2.45

Аналогично можно найти, что наибольшее значение напряжения на индуктивном элементе $U_L(\omega) = \omega LI$ получается при угловой частоте

$$\omega_L = \omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1}{1 - r^2 C / (2L)}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1}{1 - 1 / (2Q^2)}} > \omega_{\text{рез}}.$$

Чем больше добротность колебательного контура Q , тем меньше отличаются угловые частоты ω_C и ω_L от резонансной угловой частоты и тем острее все три резонансные кривые $I(\omega)$, $U_C(\omega)$ и $U_L(\omega)$.

В электроэнергетических устройствах в большинстве случаев резонанс напряжений — явление нежелательное, так как при резонансе напряжения установок могут в несколько раз превышать их рабочие напряжения. Но, например, в радиотехнике, телефонии, автоматике резонанс напряжений часто применяется для настройки цепей на заданную частоту.

Б. Резонанс токов. В участке цепи, схема замещения которой содержит параллельно соединенные индуктивный, емкостный и резистивный элементы (рис. 2.46), может возникнуть резонанс токов.

При заданном напряжении питания $\dot{U} = U \angle \psi_u$ комплексное значение общего тока

$$\dot{I} = \underline{Y} \dot{U} = y e^{-j\varphi} U e^{j\psi_u},$$

где

$$\underline{Y} = g - jb = g - j(b_L - b_C) \quad \text{и} \quad y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}$$

— комплексная и полная проводимости цепи; $\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{1/(\omega L) - \omega C}{g}$ — угол сдвига фаз между напряжением и общим током, т. е. аргумент комплексной проводимости.

Действующее значение тока

$$I = yU = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} U.$$

При угловой частоте $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ индуктивная $b_L = 1/(\omega L)$ и емкостная $b_C = \omega C$ проводимости параллельных ветвей одинаковые, аргумент комплексной проводимости цепи φ равен нулю, т. е. $\psi_i = \psi_u$, полная проводимость цепи $y = g$ и общий ток $I_{\text{рез}} = gU$ минимальный.

Режим участка цепи с параллельными ветвями, при котором сдвиг фаз между напряжением на его выводах и общим током равен нулю, называется *резонансом токов*.

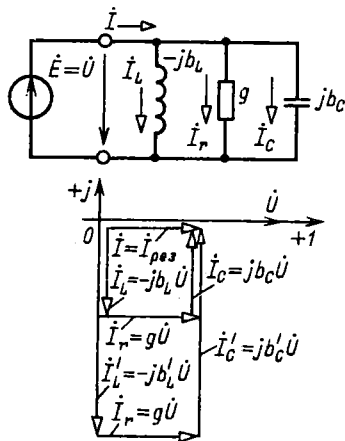


Рис. 2.47

Рис. 2.46

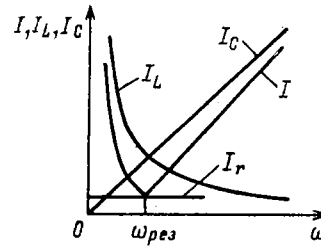


Рис. 2.48

При резонансе действующие значения токов в индуктивном и емкостном элементах одинаковые: $I_L = (1/\omega_{\text{рез}} L) U = I_C = \omega_{\text{рез}} C U$, а сдвиг фаз между токами равен π , так как ток в индуктивном элементе отстает от напряжения по фазе на угол $\pi/2$, а ток в емкостном элементе опережает напряжение на такой же угол $\pi/2$ (рис. 2.47).

Если при резонансе токов в одинаковое число раз n увеличить индуктивную и емкостную проводимости, т. е. заменить $b_L' = 1/\omega_{\text{рез}} L$ и $b_C = \omega_{\text{рез}} C$ на $b_L' = n b_L$ и $b_C' = n b_C$, то токи I_L и I_C увеличатся тоже в n раз, а общий ток останется тем же: $I_{\text{рез}} = g U$. Таким образом, в принципе можно неограниченно увеличивать токи в индуктивном и емкостном элементах при неизменном токе источника.

На рис. 2.48 показаны резонансные кривые параллельного контура. В емкостном элементе ток $I_C = \omega C U$ возрастает пропорционально угловой частоте, в индуктивном элементе ток $I_L = U/(\omega L)$ обратно пропорционален угловой частоте, в резистивном элементе ток $I_r = U/r$ от угловой частоты не зависит. Точка пересечения кривых $I_C(\omega)$ и $I_L(\omega)$ соответствует резонансу токов, при котором $I = I_r = I_{\text{рез}}$.

Если проводимость g резистивного элемента равна нулю, то и полная проводимость y резистивного элемента равна нулю. При этом общий ток цепи (ток источника) также равен нулю, что эквивалентно размыканию цепи.

Последовательно с индуктивным элементом L может быть включен резистивный элемент r_L , а последовательно с емкостным элементом C — резистивный элемент r_C , учитывающие, например, потери энергии в проводах. Условием резонанса токов в такой цепи будет

равенство индуктивной и емкостной проводимостей этих ветвей по (2.716):

$$\frac{\omega L}{r_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{r_C^2 + (1/\omega C)^2}.$$

И в этом случае при резонансе общий ток совпадает по фазе с напряжением.

Отметим, что резонанс токов в отличие от резонанса напряжений — явление безопасное для электроэнергетических установок. Резонанс токов, как и резонанс напряжений, находит применение в радиотехнических устройствах.

2.22. ЦЕПИ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

У двух катушек индуктивности с числами витков w_1 и w_2 и токами i_1 и i_2 (рис. 2.49, а), достаточно близко расположенных относительно друг друга, часть магнитных линий поля каждой из катушек может быть сцеплена с витками другой катушки. Поэтому кроме собственных потокоцеплений каждой из катушек Ψ_{11} и Ψ_{22} нужно при расчетах таких цепей учитывать добавочные потокоцепления витков пер-

вой $\Psi_{12} = \sum_{k=1}^{w_1} \Phi_{k12}$ и второй $\Psi_{21} = \sum_{k=1}^{w_2} \Phi_{k21}$ катушек, где Φ_{k12} — поток через k -й виток первой катушки от тока во второй катушке, а Φ_{k21} — поток через k -й виток второй катушки от тока в первой катушке.

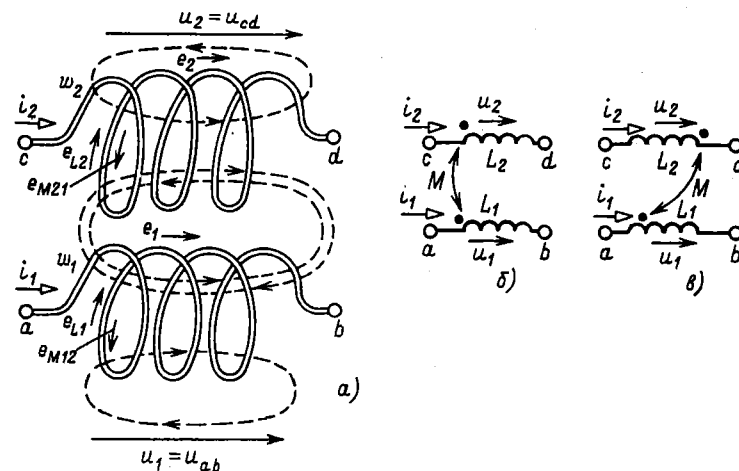


Рис. 2.49

Отношение добавочного потокоцепления первой катушки Ψ_{12} к току i_2 второй катушки называется *взаимной индуктивностью* первой и второй катушек:

$$M_{12} = \Psi_{12}/i_2.$$

Аналогично определяется взаимная индуктивность второй и первой катушек:

$$M_{21} = \Psi_{21}/i_1.$$

Опыт показывает, что $M_{21} = M_{12} = M$. Строгое доказательство этого условия возможно с применением теории электромагнитного поля. Взаимная индуктивность в линейных цепях не зависит от направлений и значений токов, а определяется только конструкцией катушек и их взаимным расположением.

Полное потокоцепление Ψ каждой из двух рассматриваемых индуктивно связанных катушек содержит две составляющие, которые могут складываться или вычитаться в зависимости от направления токов в катушках и их взаимного расположения. В первом случае включение индуктивно связанных катушек называется *согласным*, во втором случае – *встречным*. Так как эскизное изображение индуктивно связанных катушек сложно (рис. 2.49, а), то для описания характера индуктивной связи пользуются условными обозначениями.

На схемах замещения цепей обозначают точками (рис. 2.49, б и в) одноименные выводы ("начала") каждой из катушек. Если токи направлены одинаково относительно одноименных выводов (рис. 2.49, б), то катушки включены согласно. Собственное и добавочное потокоцепления в каждой катушке должны суммироваться, т. е. полное потокоцепление первой катушки

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}$$

и полное потокоцепление второй катушки

$$\Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21}.$$

Если токи направлены по-разному относительно одноименных выводов (рис. 2.49, в), то катушки включены встречно, т. е.

$$\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{12}; \quad \Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{21}.$$

Здесь, как и ранее, под направлениями токов следует понимать их выбранные положительные направления.

Согласно закону электромагнитной индукции (2.2) в каждой катушке будет индуцироваться ЭДС. В первой катушке ЭДС индукции

$$e_1 = - \frac{d\Psi_1}{dt} = - \frac{d(\Psi_{11} \pm \Psi_{12})}{dt} = e_{L1} \pm e_{M1}, \quad (2.78a)$$

и во второй катушке

$$e_2 = - \frac{d\Psi_2}{dt} = - \frac{d(\Psi_{22} \pm \Psi_{21})}{dt} = e_{L2} \pm e_{M2}, \quad (2.786)$$

где $e_{L1} = -d\Psi_{11}/dt = -L_1 di_1/dt$; $e_{L2} = -d\Psi_{22}/dt = -L_2 di_2/dt$ — ЭДС самоиндукции первой и второй катушек; $e_{M1} = -d\Psi_{12}/dt = -M di_2/dt$; $e_{M2} = -d\Psi_{21}/dt = -M di_1/dt$ — ЭДС взаимной индукции первой и второй катушек.

На рис. 2.49, а показано, что внутри катушек собственный магнитный поток и магнитный поток, вызванный током в другой катушке, направлены встречно, что соответствует нижнему знаку в (2.78) и рис. 2.49, в.

В § 2.3 было отмечено, что напряжение на катушке индуктивности $u_L = -e_L$ [см. (2.3)]. Для индуктивно связанных катушек аналогично

$$\begin{aligned} u_1 = u_{ab} &= -e_1 = -e_{L1} \mp e_{M1} = L_1 di_1/dt \pm M di_2/dt = \\ &= u_{L1} \pm u_{M1}; \end{aligned} \quad (2.79a)$$

$$\begin{aligned} u_2 = u_{cd} &= -e_2 = -e_{L2} \mp e_{M2} = L_2 di_2/dt \pm M di_1/dt = \\ &= u_{L2} \pm u_{M2}. \end{aligned} \quad (2.796)$$

При последовательном включении катушек индуктивности в общей точке могут быть соединены одноименные или разноименные выводы. В первом случае катушки включены согласно, а во втором — встречно.

Если за интервал времени t_1 токи в двух индуктивно связанных катушках изменяются от нуля до значений i_1 и i_2 , то в их общем магнитном поле будет запасена энергия

$$\begin{aligned} W_M &= \int_0^{t_1} u_1 i_1 dt + \int_0^{t_1} u_2 i_2 dt = L_1 \int_0^{i_1} i_1 di_1 + L_2 \int_0^{i_2} i_2 di_2 \pm \\ &\pm M \int_0^{i_2} i_1 di_2 \pm M \int_0^{i_1} i_2 di_1 = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2 \end{aligned} \quad (2.80)$$

(здесь применен метод интегрирования по частям: $\int_0^{i_2} i_1 di_2 = i_1 i_2 - \int_0^{i_1} i_2 di_1$).

Таким образом, по сравнению с энергией магнитного поля двух индуктивно не связанных катушек энергия общего магнитного поля двух индуктивно связанных катушек увеличивается или уменьшается

ется на

$$W_{M, B3} = Mi_1 i_2.$$

При синусоидальных токах в индуктивно связанных катушках для расчета цепей применим комплексный метод. По аналогии с комплексной формой закона Ома для индуктивного элемента (2.32) запишем в комплексной форме уравнения (2.79):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{L1} \pm \dot{U}_{M1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = jx_{L1} \dot{I}_1 \pm jx_M \dot{I}_2; \quad (2.81a)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_{L2} \pm \dot{U}_{M2} = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = \\ &= jx_{L2} \dot{I}_2 \pm jx_M \dot{I}_1, \end{aligned} \quad (2.81b)$$

где $x_M = \omega M$ — сопротивление взаимной индуктивности; $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ — комплексные значения токов.

Соответственно комплексные значения ЭДС самоиндукции и взаимной индукции

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{L1} &= -\dot{U}_{L1} = -j\omega L_1 \dot{I}_1 = -jx_{L1} \dot{I}_1; \\ \dot{E}_{M1} &= -\dot{U}_{M1} = -j\omega M \dot{I}_2 = -jx_M \dot{I}_2; \end{aligned} \right\} \quad (2.82a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{L2} &= -\dot{U}_{L2} = -j\omega L_2 \dot{I}_2 = -jx_{L2} \dot{I}_2; \\ \dot{E}_{M2} &= -\dot{U}_{M2} = -j\omega M \dot{I}_1 = -jx_M \dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.82b)$$

Комплексные мощности каждой из индуктивно связанных катушек

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = \dot{U}_{L1} \dot{I}_1^* \pm \dot{U}_{M1} \dot{I}_1^* = jx_{L1} I_1^2 \pm jx_M \dot{I}_1^* \dot{I}_2 = \\ &= jQ_{L1} \pm \underline{S}_{12}; \end{aligned} \quad (2.83a)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_2 &= \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = \dot{U}_{L2} \dot{I}_2^* \pm \dot{U}_{M2} \dot{I}_2^* = jx_{L2} I_2^2 \pm jx_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* = \\ &= jQ_{L2} \pm \underline{S}_{21}. \end{aligned} \quad (2.83b)$$

Слагаемые

$$\begin{aligned} \underline{S}_{12} &= jx_M \dot{I}_1^* \dot{I}_2 = jx_M I_1 I_2 \cos(\psi_{i2} - \psi_{i1}) - \\ &- x_M I_1 I_2 \sin(\psi_{i2} - \psi_{i1}) = jQ_{12} - P_{12} \end{aligned} \quad (2.84a)$$

и

$$\begin{aligned} \underline{S}_{21} &= jx_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* = jx_M I_1 I_2 \cos(\psi_{i1} - \psi_{i2}) - \\ &- x_M I_1 I_2 \sin(\psi_{i1} - \psi_{i2}) = jQ_{21} - P_{21}, \end{aligned} \quad (2.84b)$$

в которых $Q_{12} = Q_{21}$ и $P_{12} = -P_{21}$ определяют реактивную и активную мощности, передаваемые соответственно из второй катушки в первую и из первой во вторую.

В общем случае цепи с n индуктивно связанными катушками напряжение на каждой k -й

$$\dot{U}_k = jx_{Lk} \dot{I}_k \pm \sum_{p=1}^n jx_{Mkp} \dot{I}_p, \quad (2.85)$$

где $p \neq k$.

2.23. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Режим работы сложных цепей синусоидального тока наглядно иллюстрируют *потенциальные (топографические) диаграммы*, т. е. распределение комплексных потенциалов точек цепи на комплексной плоскости.

Построим потенциальную диаграмму цепи (рис. 2.50, а), для которой в результате расчета определены комплексные значения токов в ветвях I_1, I_2, I_3 . Эти токи и ЭДС E_1 и E_2 изображены на векторной диаграмме (рис. 2.50, б).

Для построения потенциальной диаграммы цепи выберем точку начала отсчета потенциалов, например точку 1, потенциал которой $\dot{\varphi}_1$ принят равным нулю. Определим комплексные значения потенциалов остальных точек цепи. При указанных на схеме на рис. 2.50, а положительных направлениях токов и заданных направлениях действия ЭДС

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}_1 - \dot{U}_{L2} = \dot{\varphi}_1 - jx_{L2} \dot{I}_2; \\ \dot{\varphi}_3 &= \dot{\varphi}_2 - \dot{U}_r = \dot{\varphi}_2 - r \dot{I}_2; \\ \dot{\varphi}_4 &= \dot{\varphi}_3 + \dot{U}_{L1} = \dot{\varphi}_3 + jx_{L1} \dot{I}_1 = \dot{\varphi}_1 + E_1; \\ \dot{\varphi}_5 &= \dot{\varphi}_3 - \dot{U}_C = \dot{\varphi}_3 - (-jx_C \dot{I}_3) = \dot{\varphi}_1 + E_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Потенциал точки, выбранной за начало отсчета, поместим в начало координат ($\dot{\varphi}_1 = 0$). Соотношения (2.86) определяют потенциалы остальных точек цепи, а значит, и положения соответствующих точек на комплексной плоскости. Например, чтобы найти положение точки, соответствующей потенциалу $\dot{\varphi}_2$, нужно вектор комплексного тока I_2 повернуть по направлению движения часовой стрелки на угол $\pi/2$, что соответствует согласно (2.26) умножению его на $(-j)$, и умножить на x_{L2} . При совмещении начала полученного в результате такого преобразования вектора с точкой расположения на комплексной плоскости потенциала $\dot{\varphi}_1$ (начало координат) конец вектора укажет положение

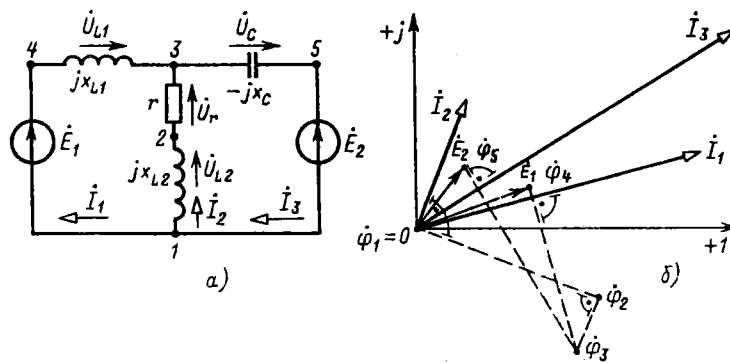


Рис. 2.50

потенциала φ_2 . Аналогично находятся положения точек, изображающих комплексные потенциалы остальных точек цепи.

При построении потенциальных диаграмм цепей с индуктивно связанными катушками необходимо учесть, что напряжение на индуктивных элементах в общем случае определяется выражением (2.85).

При помощи потенциальной диаграммы можно определить комплексные напряжения $\dot{U}_{mn} = \dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n$ между различными точками m и n цепи, рассчитать комплексные мощности участков цепи $\underline{S} = \dot{U}_{mn} \dot{I}_{mn}^*$ и т. д.

2.24. КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ. ФАЗОСДВИГАЮЩИЕ ЦЕПИ

При помощи круговых диаграмм можно наглядно представить и анализировать режимы цепей, в которых значения параметров одного или нескольких участков изменяются. Такие цепи применяются, например, в фазосдвигающих устройствах автоматики.

Одна из возможных схем фазосдвигающей цепи с двумя пассивными параллельными ветвями, токи в которых $\dot{I}_1 = \dot{E}/(r_1 + r_2)$ и $\dot{I}_2 = \dot{E}/(r_3 - jx_C)$, приведена на рис. 2.51, а. Свойства цепи определяет

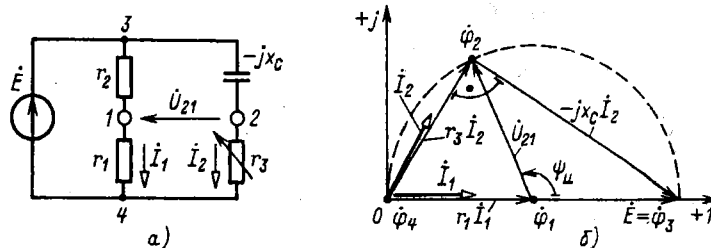


Рис. 2.51

ее потенциальная диаграмма (рис. 2.51, б), которая построена в предположении, что сопротивления $r_1 = r_2$, начальная фаза ЭДС E равна нулю и за начало отсчета потенциалов выбран потенциал точки 4, т. е. $\dot{\varphi}_4 = 0$; $\dot{\varphi}_1 = r_1 \dot{I}_1$; $\dot{\varphi}_2 = r_3 \dot{I}_2$; $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 - jx_C \dot{I}_2 = \dot{E}$, и так как $r_1 = r_2$, то $\varphi_1 = E/2$.

Вершина прямоугольного треугольника напряжений (вектор $-jx_C \dot{I}_2$ отстает по фазе от вектора $r_3 \dot{I}_2$ на $\pi/2$) находится на полуокружности с диаметром, равным ЭДС $E = E$.

При изменении сопротивления в пределах $\infty \geq r_3 \geq 0$ фаза напряжения $U_{21} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$ изменяется в интервале $0 \leq \psi_u \leq \pi$.

Если в цепи на рис. 2.51, а емкостный элемент заменить индуктивным, то вершина прямоугольного треугольника напряжений $\dot{\varphi}_2$ будет находиться на полуокружности, симметричной полуокружности на рис. 2.51, б, относительно оси действительных величин, а фаза напряжения U_{21} будет иметь отрицательное значение $-\pi \leq \psi_u \leq 0$ при изменении сопротивления в пределах $0 \leq r_3 \leq \infty$.

2.25. ЧАСТОТНЫЕ ГОДОГРАФ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

Частотным годографом называется совокупность геометрических мест конца вектора, изображающего комплексную величину, при изменении угловой частоты в границах $0 \leq \omega \leq \infty$.

Частотной характеристикой называется зависимость модуля вектора, изображающего комплексную величину, или его действительной и мнимой составляющих от угловой частоты.

В качестве примера рассмотрим частотные годограф и характеристики комплексного сопротивления (2.48) схем замещения с последовательным соединением резистивного и реактивного (индуктивного или емкостного) элементов (см. рис. 2.26, а и б). Эти комплексные сопро-

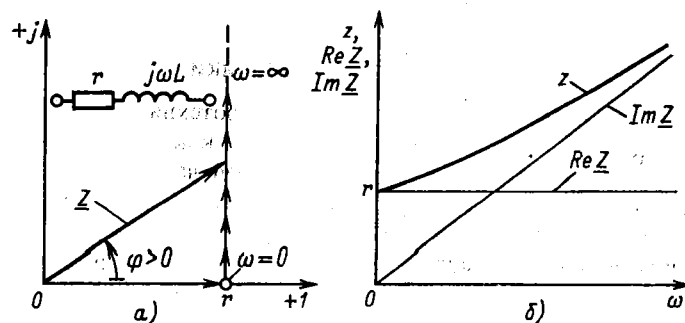


Рис. 2.52

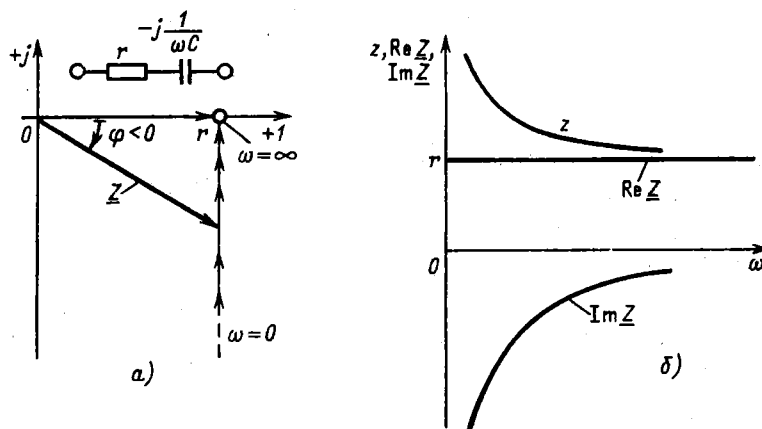


Рис. 2.53

тивления соответственно равны

$$\underline{Z} = r + j\omega L = \operatorname{Re} \underline{Z} + j \operatorname{Im} \underline{Z} \quad (2.87)$$

и

$$\underline{Z} = r - j \frac{1}{\omega C} = \operatorname{Re} \underline{Z} + j \operatorname{Im} \underline{Z}. \quad (2.88)$$

На рис. 2.52 построены частотные годограф (а) и характеристики (б) по выражению (2.87), а на рис. 2.53, а и б — подобные зависимости по выражению (2.88).

Аналогично строятся частотные годограф и характеристики пассивного двухполюсника. Частотные годограф и характеристики часто применяются при расчете цепей автоматизированных систем управления технологическими процессами.

2.26. ПАССИВНЫЕ ЧЕТЫРЕХ- И ТРЕХПОЛЮСНИКИ

Расчет рабочего режима многих электротехнических устройств упрощается, если их можно рассматривать как *четыреxpолyсники* (рис. 2.54), которые соединяются с остальной частью цепи двумя парами выводов (полюсов) 1-1' и 2-2'. Если сам *четыреxpолyсник* не содержит источников энергии, то он называется *пассивным*, а если содержит — *активным*. Примером активного *четыреxpолyсника* может служить дифференциальный усилитель, пассивного *четыреxpолyсника* — двухобмоточный трансформатор, линия телефонной связи, измерительный мост. Схема линейного пассивного *четыреxpолyсника* содержит только линейные резистивные, индуктивные и емкостные элементы,

нелинейного — также и одноименные нелинейные элементы. Если две пары выводов соединяются только через цепь четырехполюсника, то его включение называется *автономным*, в противном случае — *неавтономным*.

Ограничимся в дальнейшем анализом пассивных линейных четырехполюсников при автономном включении.

Предположим, что к выводам $1-1'$ четырехполюсника присоединен источник ЭДС $\dot{E}_1$, а к выводам $2-2'$ — приемник с сопротивлением нагрузки $Z_{2н}$ (рис. 2.54, а). Такое включение называют *прямым питанием*, выводы $1-1'$ при этом называют *входными*, а $2-2'$ — *выходными*.

Найдем зависимость между током $\dot{I}_1$ и напряжением $\dot{U}_1 = \dot{E}_1$ на входе и током $\dot{I}_2 = -\dot{I}_н$ и напряжением $\dot{U}_2 = Z_{2н} \dot{I}_н$ на выходе четырехполюсника. Противоположные направления токов на выходе четырехполюсника $\dot{I}_2$ и в цепи нагрузки $\dot{I}_н$ соответствуют принятым направлениям в теории нелинейных четырехполюсников (см. гл. 6) и усилителей (см. гл. 10). Воспользовавшись принципом компенсации (см. § 1.13), заменим приемник с сопротивлением нагрузки $Z_{2н}$ источником с ЭДС, направленной навстречу току и равной $\dot{E}_2 = Z_{2н} \dot{I}_н = \dot{U}_2$ (рис. 2.54, б). В полученной схеме замещения действуют два источника ЭДС, и для определения токов на входе и выходе четырехполюсника можно применить метод наложения (см. § 1.12):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \dot{E}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{E}_2 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \dot{E}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{E}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

или в матричной форме

$$\underline{\dot{I}} = \underline{Y} \underline{\dot{U}},$$

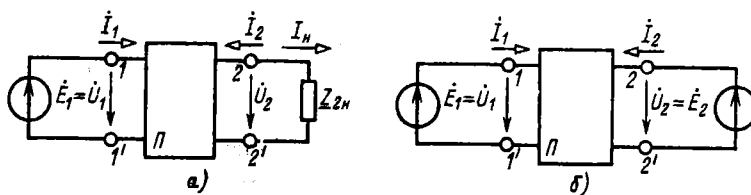


Рис. 2.54

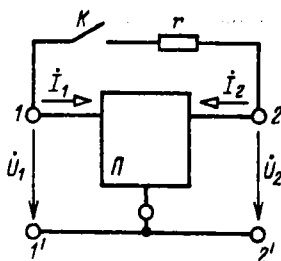


Рис. 2.55

где $\underline{Y}_{11}$ и $\underline{Y}_{22}$ – собственные комплексные проводимости ветвей четырехполюсника, содержащих источники ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$; $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ – взаимная комплексная проводимость этих ветвей.

Комплексные проводимости $\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{22}$, $\underline{Y}_{12}$ и $\underline{Y}_{21}$ определяются значениями параметров элементов цепи четырехполюсника, и их можно измерить (см. § 1.12).

В устройствах автоматики и радиотехники часто важно знать зависимость от частоты отношений комплексных значений напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ на выходе четырехполюсника к одноименным величинам $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ на его входе.

Относительные изменения одноименных величин определяются уравнениями четырехполюсника (2.89) и называются *коэффициентом передачи напряжения*

$$\underline{K}_u = \underline{K}_u(\omega) e^{j\theta_u(\omega)} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{U_2 \angle \psi_{u2}}{U_1 \angle \psi_{u1}} = \frac{\underline{Y}_{21}}{1 \underline{Z}_{2H} - \underline{Y}_{22}} \quad (2.90a)$$

и *коэффициентом передачи тока*

$$\begin{aligned} \underline{K}_i &= \underline{K}_i(\omega) e^{j\theta_i(\omega)} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{I_2 \angle \psi_{i2}}{I_1 \angle \psi_{i1}} = \\ &= \frac{\underline{Y}_{21} + \underline{K}_u \underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11} + \underline{K}_u \underline{Y}_{12}}, \end{aligned} \quad (2.90b)$$

где

$$\underline{K}_u(\omega) = U_2/U_1, \quad \underline{K}_i(\omega) = I_2/I_1 \quad (2.91a)$$

– амплитудно-частотные характеристики;

$$\theta_u(\omega) = \psi_{u2} - \psi_{u1}, \quad \theta_i(\omega) = \psi_{i2} - \psi_{i1} \quad (2.91b)$$

– фазочастотные характеристики напряжения и тока четырехполюсника.

Если один вывод входной и один вывод выходной цепей четырехполюсника соединены, то четырехполюсник представляет собой трехполюсник (рис. 2.55). Рассматривая трехполюсник как частный случай четырехполюсника, отметим его принципиальное отличие от последнего. Оно заключается в том, что элементы матрицы проводимостей $\underline{Y}$ в (2.89) для трехполюсника не изменяются при его автономном (ключ K на рис. 2.55 разомкнут) и неавтономном (ключ K на рис. 2.55 замкнут) включениях. В обоих случаях режим работы трехполюсника определяется только значениями напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$.

Матрица проводимостей $\underline{Y}$ в (2.89) для четырехполюсника в общем случае зависит от схемы его включения, которая может влиять на режим его работы даже при $\dot{U}_1 = \text{const}$ и $\dot{U}_2 = \text{const}$.

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

3.1. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА

Объединение в одну цепь нескольких подобных по структуре цепей синусоидального тока одной частоты с независимыми источниками энергии широко применяется в технике. Объединяемые цепи синусоидального тока принято называть *фазами*, а всю объединенную систему цепей — *многофазной системой*. Таким образом, в электротехнике термин "фаза" применяется в двух различных смыслах: во-первых, это параметр периодического процесса, а во-вторых — наименование составной части многофазной системы цепей синусоидального тока. Наибольшее распространение получила трехфазная система.

Трехфазная система была изобретена и разработана во всех деталях, включая трехфазные трансформатор и асинхронный двигатель, выдающимся русским инженером М. О. Доливо-Добровольским (1862—1919) в 1891 г. В настоящее время для передачи и распределения энергии в подавляющем большинстве случаев применяются трехфазные системы. Очень важным преимуществом трехфазной системы является также исключительная простота и дешевизна трехфазных асинхронных двигателей. Помимо трехфазной системы практическое значение имеет шестифазная система, например в устройствах выпрямления переменного тока, а в некоторых устройствах автоматики применяется двухфазная система.

Источником энергии в трехфазной системе служит трехфазный генератор. Он отличается от однофазного генератора синусоидального тока (см. рис. 2.5, а) тем, что в пазах его статора размещены не одна, а три электрически изолированные друг от друга обмотки — фазные обмотки генератора. Если ротор генератора двухполюсный, то оси фазных обмоток генератора повернуты в пространстве относительно друг друга на угол $2\pi/3$ (рис. 3.1). При вращении ротора в фазных обмотках статора индуцируются синусоидальные фазные ЭДС. Вследствие симметрии конструкции генератора максимальные E_m и действующие E_f значения ЭДС во всех фазах одинаковые. Однако линии магнитного поля вращающегося ротора пересекают провода фазных обмоток не одновременно. Поэтому синусоидальные ЭДС обмоток сдвинуты по фазе относительно друг друга на одну треть периода, чему соответствует пространственный угол $2\pi/3$ между осями обмоток.

Если ротор генератора многополюсный, то каждой паре его полюсов соответствуют на статоре три изолированные друг от друга катушки трехфазных обмоток. Размещенные вдоль окружности статора отдельные катушки, число которых равно числу пар полюсов каждой фазной обмотки, соединяются между собой последовательно или параллельно.

Фазы трехфазного генератора принято обозначать первыми буквами латинского алфавита: *A, B, C*. Последовательность обозначения фаз генератора, т. е. *чередования фаз*, не может быть случайной, так как она определяется последовательностью изменений во времени фазных ЭДС. Обозначения выбираются так, чтобы ЭДС фазы *A* достигала максимального значения на одну треть периода раньше, чем ЭДС фазы *B*, и на две трети периода раньше, чем ЭДС фазы *C*. Такая последовательность чередования фаз называется *нормальной*, или *прямой*. От последовательности фаз зависит направление вращения трехфазных двигателей. При прямой последовательности чередования фаз мгновенные значения ЭДС трех фазных обмоток равны

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin (\omega t - 2\pi/3); \\ e_C &= E_m \sin (\omega t - 4\pi/3) = E_m \sin (\omega t + 2\pi/3); \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

здесь с нулевой начальной фазой, как обычно, выбрана ЭДС фазы *A*.

На рис. 3.2 показаны график мгновенных значений фазных ЭДС и три вектора соответствующих им комплексных значений. Сумма трех векторов комплексных значений ЭДС равна нулю. Следовательно-

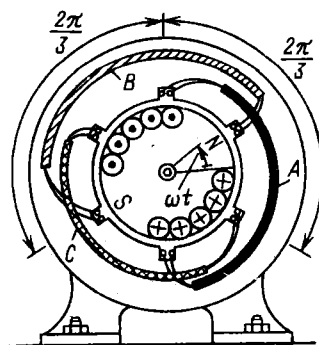


Рис. 3.1

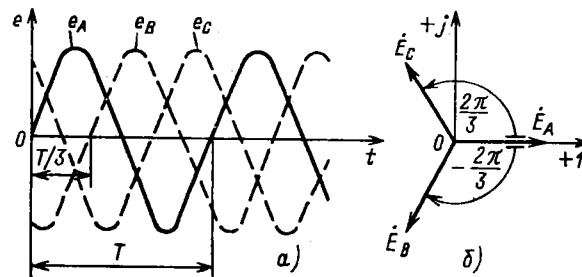


Рис. 3.2

но, алгебраическая сумма комплексных значений фазных ЭДС и алгебраическая сумма мгновенных значений фазных ЭДС генератора равны нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0; \quad (3.2a)$$

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (3.2б)$$

Комплексные значения ЭДС трехфазного симметричного генератора можно выразить через одинаковое для всех трех фаз действующее значение E_Φ и соответствующий комплексный множитель:

$$\dot{E}_A = E_\Phi \angle 0^\circ = E_\Phi;$$

$$\dot{E}_B = E_\Phi e^{-j2\pi/3} = E_\Phi \angle -120^\circ = E_\Phi \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\dot{E}_C = E_\Phi e^{j2\pi/3} = E_\Phi \angle +120^\circ = E_\Phi \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Комплексная величина $e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ называется *фазным*

множителем трехфазной системы и обозначается буквой a . Умножение комплексного значения на a соответствует повороту изображающего вектора на угол $2\pi/3 = 120^\circ$ в положительном направлении, т. е. против направления движения стрелки часов. Таким образом,

$$\dot{E}_A = E_\Phi; \quad \dot{E}_B = E_\Phi a^2; \quad \dot{E}_C = E_\Phi a. \quad (3.3)$$

Для получения трехфазной системы необходимо определенным образом соединить фазы источника энергии и фазы приемника. Возможны два основных способа соединения в трехфазной системе — соединение фаз источника энергии и приемника звездой и треугольником.

3.2. СОЕДИНЕНИЕ ФАЗ ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ И ПРИЕМНИКА ЗВЕЗДОЙ

Фазные обмотки трехфазного генератора можно соединить с тремя приемниками энергии шестью проводами (рис. 3.3) и получить три независимые фазные цепи. Необъединенная трехфазная система практически не применяется, но она важна для уяснения соотношений после объединения фазных цепей. Обратим внимание на стрелки, указывающие положительные направления фазных ЭДС. Эти положительные направления определяют "начала" (A, B, C) и "концы" (X, Y, Z) фазных обмоток генератора.

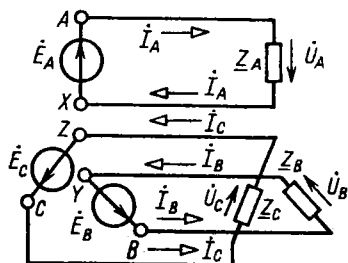


Рис. 3.3

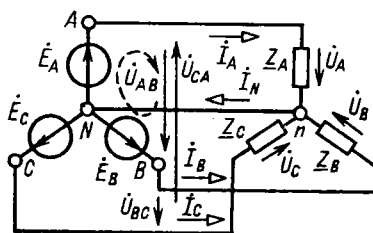


Рис. 3.4

При соединении фаз источника энергии и приемника звездой (условное обозначение Y) все концы фазных обмоток генератора соединяются в общий узел N (рис. 3.4); такой же узел n образует соединение трех фаз приемника, а три обратных провода фаз системы объединяются в один общий *нейтральный провод*. Остальные три провода, соединяющие генератор с приемником, называются *линейными*. Узел, который образуют обмотки фаз генератора или фазы приемника, называется *нейтралью* или *нейтральной точкой*.

Пренебрегая сопротивлениями всех проводов, легко определить токи трех фаз приемника и генератора:

$$\dot{I}_A = \dot{E}_A / Z_A, \quad \dot{I}_B = \dot{E}_B / Z_B, \quad \dot{I}_C = \dot{E}_C / Z_C \quad (3.4)$$

и ток в нейтральном проводе:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (3.5)$$

Приемник с одинаковыми сопротивлениями всех трех фаз

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_\phi = z_\phi e^{j\varphi}$$

называется *симметричным*. При симметричном приемнике у токов всех фаз одинаковые действующие значения I_ϕ и одинаковые сдвиги фаз φ относительно соответствующих фазных ЭДС (рис. 3.5), ток в нейтральном проводе (3.5) равен нулю. Поэтому в случае симметричного приемника, или, как говорят, при симметричной нагрузке генератора, нейтральный провод не нужен и не прокладывается. Примером такого приемника является трехфазный двигатель с соединением фазных обмоток звездой.

В трехфазной системе напряжения $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ между выводами каждой фазной обмотки генератора или каждой фазы приемника называются *фазными напряжениями*. У симметричной трехфазной си-

стемы действующие значения фазных напряжений одинаковы: $U_A = U_B = U_C = U_\phi$.

Фазными токами называются токи в фазных обмотках генератора или в фазах приемника. *Напряжения* между линейными проводами называются *линейными*, и *линейными* называются *токи* в линейных проводах.

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для контура, обозначенного на рис. 3.4 штриховой линией, и двух других аналогичных контуров и учтем, что

$$\dot{E}_A = \dot{U}_A, \quad \dot{E}_B = \dot{U}_B, \quad \dot{E}_C = \dot{U}_C. \quad (3.6)$$

Для линейных напряжений получим

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_\phi \angle 30^\circ; \quad (3.7a)$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = \dot{U}_B - \dot{U}_C = U_\phi \angle -90^\circ; \quad (3.76)$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = \dot{U}_C - \dot{U}_A = U_\phi \angle 150^\circ, \quad (3.7b)$$

где U_ϕ — действующее значение линейного напряжения.

Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений при соединении фаз источника энергии и приемника звездой дана на рис. 3.5. Вектор линейного напряжения $\dot{U}_{AB}$ построен по (3.7a), т. е. получен как результат суммирования вектора $\dot{U}_A$ и вектора $-\dot{U}_B$, который по длине равен вектору $\dot{U}_B$ и противоположен ему по направлению. Аналогично построены и остальные два вектора линейных напряжений.

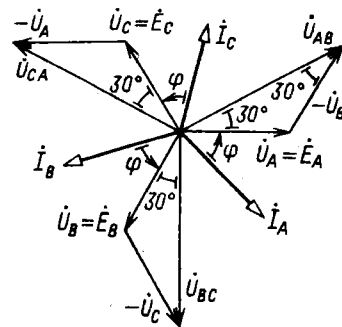


Рис. 3.5

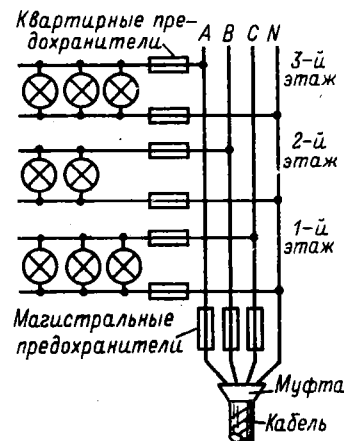


Рис. 3.6

При наличии нейтрального провода (рис. 3.4) условия (3.6) выполняются как при симметричном, так и при несимметричном приемнике, а при отсутствии нейтрального провода — только при симметричном. В обоих случаях векторы комплексных значений фазных и линейных напряжений образуют три одинаковых равнобедренных треугольника с углами 30° при основании. Из треугольников напряжений следует, что между действующими значениями линейных и фазных напряжений справедливо соотношение

$$U_{\text{л}} = 2U_{\text{ф}} \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_{\text{ф}}, \quad (3.8)$$

например линейное напряжение $U_{\text{л}} = 380$ В, а фазное $U_{\text{ф}} = 220$ В или линейное $U_{\text{л}} = 220$ В, а фазное $U_{\text{ф}} = 127$ В.

При соединении фаз источника энергии и приемника звездой линейные токи равны соответствующим фазным токам. В случае симметричного приемника действующие значения всех линейных и фазных токов одинаковы:

$$I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}. \quad (3.9)$$

Каждый трехфазный двигатель представляет собой симметричный приемник. Поэтому для подключения электродвигателей к источнику энергии применяют трехпроводные линии. Но для осветительной нагрузки (рис. 3.6) нейтральный провод необходим, поскольку нет оснований рассчитывать на полную симметрию такого трехфазного приемника. В нейтральном проводе четырехпроводной осветительной магистрали запрещена установка предохранителей или выключателей, так как при отключении нейтрального провода фазные напряжения могут стать неравными. В результате в одних фазах (или фазе) может наблюдаться недокал, а в других фазах (или фазе) — перекал и быстрое перегорание ламп. Если при таком соединении перегорят одни из магистральных предохранителей, то отключатся лампы только одной (соответствующей) фазы.

3.3. СОЕДИНЕНИЕ ФАЗ ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ И ПРИЕМНИКА ТРЕУГОЛЬНИКОМ

У трехфазной системы с фазами, соединенными треугольником (условное обозначение Δ), нейтральный провод отсутствует. Покажем сначала, как можно получить такую трехфазную цепь из необъединенной системы (рис. 3.7, а), в которой три фазные обмотки генератора соединены шестью проводами с тремя приемниками. Чтобы получить соединение фазных обмоток генератора треугольником (рис. 3.7, б), подключим конец X первой обмотки к началу B второй обмотки, конец Y второй обмотки — к началу C третьей обмотки и конец Z третьей обмотки — к началу A первой обмотки. Так как алгебраическая сум-

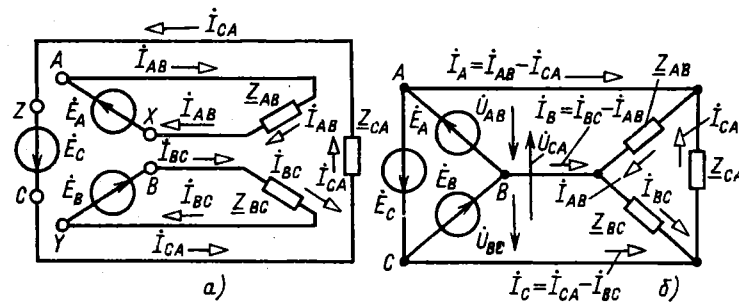


Рис. 3.7

ма синусоидальных фазных ЭДС генератора равна нулю [см. (3.2)], то никакого дополнительного (уравнительного) тока в обмотках генератора не возникнет*.

После объединения обмоток генератора напряжения между началом и концом каждой фазы не изменятся, т. е. эти фазные напряжения одинаковы для несвязанной (рис. 3.7, а) и связанной (рис. 3.7, б) систем. Поэтому и токи в фазах приемника, т. е. фазные токи, I_{AB} , I_{BC} , I_{CA} в связанной системе такие же, как и в несвязанной. Токи в каждом из трех объединенных линейных проводов, т. е. линейные токи, равны разности соответствующих фазных токов (первый закон Кирхгофа для узлов приемника):

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}; \quad I_B = I_{BC} - I_{AB}; \quad I_C = I_{CA} - I_{BC}. \quad (3.10)$$

Линейные напряжения равны соответствующим фазным напряжениям, их комплексные значения:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{E}_C. \quad (3.11)$$

По закону Ома комплексные значения фазных токов:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{E}_A / Z_{AB}; \quad \dot{I}_{BC} = \dot{E}_B / Z_{BC}; \quad \dot{I}_{CA} = \dot{E}_C / Z_{CA}, \quad (3.12)$$

причем у симметричного приемника

$$Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_{\phi} = z_{\phi} e^{j\varphi} \quad (3.13)$$

* Фазные ЭДС практически отличаются от синусоидальных, и алгебраическая сумма ЭДС может и не равняться нулю, вследствие чего возникнет ток в обмотке генератора. Это одна из причин отказа от соединения обмоток генератора треугольником.

и у всех фазных токов одинаковые действующие значения I_ϕ и одинаковые сдвиги фаз φ относительно соответствующих ЭДС или фазных напряжений.

Векторная диаграмма напряжений и токов показана на рис. 3.8. Из треугольников токов следует, что в симметричной трехфазной системе для действующих значений линейных и фазных токов справедливо соотношение

$$I_\text{л} = 2I_\phi \cos 30^\circ = \sqrt{3} I_\phi. \quad (3.14)$$

Как следует из (3.11), действующие значения линейных и фазных напряжений равны друг другу и при несимметричном приемнике:

$$U_\text{л} = U_\phi. \quad (3.15)$$

Преимуществом соединения фаз источника энергии и приемника треугольником по сравнению с соединением звездой без нейтрального провода является взаимная независимость фазных токов. На рис. 3.9 показана осветительная установка с фазами, соединенными треугольником. Если при таком соединении перегорит один из магистральных предохранителей (например, в линейном проводе B), то лампы в двух фазах (AB и BC) окажутся последовательно включенными и при одинаковой мощности ламп напряжение на лампах каждой из этих фаз будет равно только половине линейного (номинального) напряжения; напряжение на лампах третьей фазы (CA) останется нормальным.

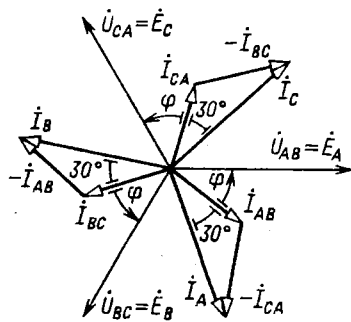


Рис. 3.8

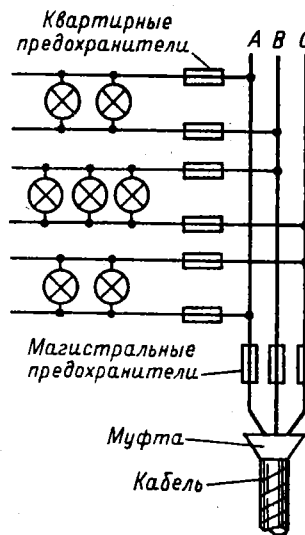


Рис. 3.9

Рассмотренные выше методы анализа соединений одноименных фаз источника энергии и приемника звездой и треугольником можно распространить и на трехфазную цепь, у которой соединения фаз источника энергии и фаз приемника различные.

3.4. АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ, КОМПЛЕКСНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Активной мощностью (часто просто мощностью) *трехфазной системы* называется сумма активных мощностей всех фаз источника энергии, равная сумме активных мощностей всех фаз приемника.

В симметричной трехфазной системе, т. е. в системе с симметричными генератором и приемником, при любой схеме их соединений для каждой фазы мощности источника энергии и приемника одинаковые. В этом случае $P = 3P_{\phi}$ и для каждой из фаз справедлива формула активной мощности синусоидального тока (2.55):

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi,$$

где φ — угол сдвига фаз между *фазными* напряжением и током.

Заменив действующие значения фазных тока и напряжения линейными при соединении фаз источника энергии и приемника звездой [см. (3.8), (3.9)] и треугольником [см. (3.14), (3.15)], получим одно и то же выражение для активной мощности симметричной трехфазной системы:

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi. \quad (3.16)$$

В промышленных установках приемники обычно симметричные или почти симметричные, т. е. мощность может быть вычислена по (3.16).

В общем случае *реактивной мощностью трехфазной системы* называется сумма реактивных мощностей всех фаз источника энергии, равная сумме реактивных мощностей всех фаз приемника. Реактивная мощность симметричной трехфазной системы по (2.58)

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi,$$

или после замены действующих значений фазных тока и напряжения линейными

$$Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi. \quad (3.17)$$

Комплексной мощностью трехфазной системы называется сумма комплексных мощностей всех фаз источника энергии, равная сумме комплексных мощностей всех фаз приемника.

Полная мощность симметричной трехфазной системы

$$S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}. \quad (3.18)$$

3.5. СРАВНЕНИЕ УСЛОВИЙ РАБОТЫ ПРИЕМНИКА ПРИ СОЕДИНЕНИЯХ ЕГО ФАЗ ТРЕУГОЛЬНИКОМ И ЗВЕЗДОЙ

Схема соединения трех фаз приемника не зависит от схемы соединения трех фаз генератора. Соединение фаз приемника треугольником часто переключается на соединение звездой для изменения тока и мощности, например для уменьшения пусковых токов трехфазных двигателей, изменения температуры трехфазных электрических печей и т. д.

Рассмотрим, как изменяются действующие значения токов симметричного приемника с полным фазным сопротивлением z_ϕ при переключении фаз со звезды на треугольник, например, простым трехполюсным переключателем (рис. 3.10).

При соединении фаз приемника звездой между действующими значениями фазных и линейных токов (3.9) и напряжений (3.8) справедливы соотношения

$$I_{\phi Y} = U_{\phi Y} / z_\phi = I_{л Y}; \quad U_{\phi Y} = U_\pi / \sqrt{3},$$

из которых следует, что

$$I_{л Y} = U_\pi / \sqrt{3} z_\phi. \quad (3.19)$$

При соединении фаз приемника треугольником между действующими значениями фазных и линейных токов (3.14) и напряжений (3.15) справедливы соотношения

$$I_{\phi \Delta} = U_{\phi \Delta} / z_\phi = I_{л \Delta} / \sqrt{3}; \quad U_{\phi \Delta} = U_\pi,$$

из которых следует, что

$$I_{л \Delta} = \sqrt{3} U_\pi / z_\phi. \quad (3.20)$$

Сопоставив выражения для действующих значений линейных токов при соединении фаз приемника звездой (3.19) и треугольником (3.20), получим при одном и том же действующем значении линейного напряжения U_π и одинаковых полных фазных сопротивлениях z_ϕ

$$I_{л \Delta} = 3 I_{л Y},$$

а для действующих значений фазных токов

$$I_{\phi \Delta} = \sqrt{3} I_{\phi Y}.$$

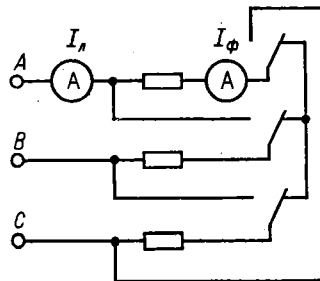


Рис. 3.10

Активная мощность трехфазного симметричного приемника при любой из схем соединения по (3.16) равна

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

Вследствие уменьшения действующего значения линейного тока при переключении фаз приемника с треугольника на звезду мощность уменьшается в 3 раза, т. е.

$$P_{\Delta} = 3P_Y. \quad (3.21)$$

3.6. ИЗМЕРЕНИЕ АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ

У симметричного трехфазного приемника мощности всех фаз одинаковы, поэтому достаточно измерить активную мощность $P_{\text{ф}}$ одной фазы. Активная мощность приемника $P = 3P_{\text{ф}}$.

Очень просто измеряется мощность одной фазы $P_{\text{ф}}$, если фазы приемника соединены звездой с доступной нейтральной точкой. На рис. 3.11, а показано включение ваттметра, который измеряет мощность фазы А приемника. Подобное включение ваттметра позволяет измерить мощность одной фазы, если фазы приемника соединены треугольником (рис. 3.11, б).

Если фазы симметричного приемника недоступны, то необходима искусственная нейтральная точка. Это — нейтральная точка цепи с фазами, соединенными звездой, состоящей из цепи напряжения ваттметра

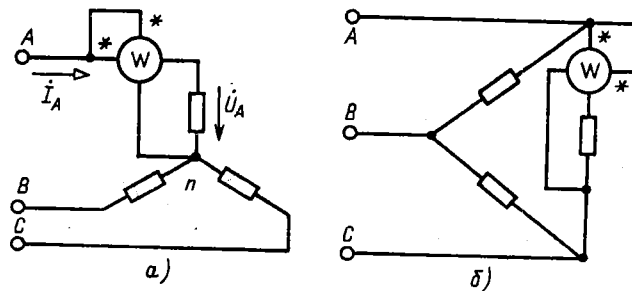


Рис. 3.11

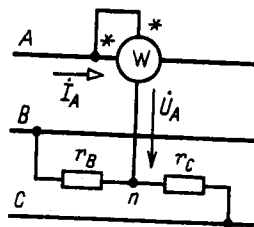


Рис. 3.12

с сопротивлением r и двух резисторов с сопротивлениями $r_B = r_C = r$ (рис. 3.12). При таком соединении цепь напряжения ваттметра находится под фазным напряжением, ток в его цепи равен фазному (линейному) току приемника, соединенного по схеме звезды (треугольника). Следовательно, в обоих случаях (3.16) ваттметр измеряет третью часть мощности приемника. Обычно завод-изготовитель выпускает такой ваттметр с искусственной нейтральной точкой для измерения мощности в симметричных трехфазных системах.

В трехфазных трехпроводных системах мощность при несимметричном приемнике в большинстве случаев измеряют *методом двух ваттметров* (рис. 3.13). Своеобразная особенность этого метода измерения заключается в том, что даже при симметричном приемнике показания двух ваттметров в большинстве случаев не одинаковые, причем показание одного из них может быть и отрицательным. В этом случае мощность трехфазной системы равна *алгебраической сумме* показаний двух ваттметров.

Для доказательства справедливости измерения мощности методом двух ваттметров сначала выразим мгновенную мощность системы через мгновенные значения напряжений и токов. Мгновенная мощность любой фазы равна произведению мгновенных значений фазных напряжения и тока, а мгновенная мощность трехфазной системы равна сумме мгновенных мощностей фаз. В частности, при соединении фаз приемника звездой мгновенная мощность

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Но при соединении фаз приемника звездой без нейтрального провода

$$i_A + i_B + i_C = 0$$

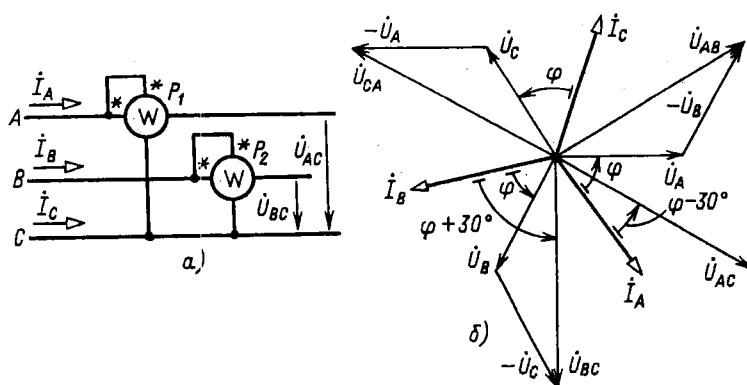


Рис. 3.13

и, следовательно,

$$i_C = -(i_A + i_B).$$

Подставив это значение тока i_C в выражение мгновенной мощности, получим

$$p = (u_A - u_C)i_A + (u_B - u_C)i_B.$$

Так как разность фазных напряжений равна соответствующему линейному напряжению [см. (3.7)], т. е.

$$u_A - u_C = u_{AC}, \quad u_B - u_C = u_{BC},$$

то мгновенная мощность

$$p = u_{AC}i_A + u_{BC}i_B. \quad (3.22)$$

Следовательно, мгновенная мощность трехфазной системы равна сумме двух произведений мгновенных значений линейных напряжений и токов. Сумма средних значений этих двух произведений, т. е. активная мощность системы, может быть измерена двумя ваттметрами (рис. 3.13, а):

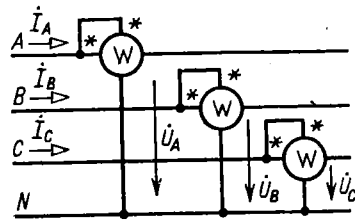
$$P = P_1 + P_2 = U_{CA} I_A \cos(\psi_u - \psi_i) + U_{BC} I_B \cos(\psi_u - \psi_i), \quad (3.23)$$

где $\psi_u - \psi_i$ — угол сдвига фаз между соответствующими линейным напряжением и током.

При правильном включении ваттметров положительные направления линейных напряжений и токов должны совпадать с направлением от "начала" к "концу" цепи напряжения и цепи тока ваттметров. Так, у первого ваттметра нужно соединить "начало" (вывод, отмеченный звездочкой) цепи напряжения с проводом А, а "конец" этой цепи — с проводом С.

Распределение измеряемой мощности трехфазной системы между показаниями двух ваттметров зависит главным образом от углов сдвига фаз между линейными напряжениями и токами [см. (3.23)]. Проследим эту зависимость в случае симметричного приемника. На рис. 3.13, б построена векторная диаграмма напряжений и токов в случае симметричного приемника, фазы которого соединены звездой. Углы сдвига фаз между соответствующими фазными напряжением и током одинаковые и равны аргументу φ комплексного сопротивления фазы приемника. Из диаграммы следует, что при симметричном приемнике углы сдвига фаз между векторами $\dot{U}_{AC}$ и $\dot{I}_A$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{I}_B$ соответственно равны $\varphi - 30^\circ$ и $\varphi + 30^\circ$.

Рис. 3.14



Действующие значения линейных напряжений и линейных токов при симметричном приемнике соответственно одинаковые, т. е. $U_{BC} = U_{AC} = U_{\text{л}}$; $I_A = I_B = I_{\text{л}}$.

Таким образом, сумма показаний двух ваттметров, равная мощности симметричной трехфазной системы,

$$P = P_1 + P_2 = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos(\varphi - 30^\circ) + U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos(\varphi + 30^\circ).$$

Из этого выражения следует, что при симметричном приемнике показания ваттметров P_1 и P_2 будут равны только при $\varphi = 0$. Если $\varphi > 60^\circ$, то показание второго ваттметра P_2 будет отрицательным, т. е. сумма показаний алгебраическая.

Можно не доказывать возможность измерения мощности методом двух ваттметров при соединении фаз приемника треугольником, так как при заданных значениях линейных напряжений и токов мощность не зависит от схемы соединения фаз приемника.

Для измерения мощности в трехфазных системах с нейтральным проводом простейшим является метод трех ваттметров (рис. 3.14). При таком соединении каждый из ваттметров измеряет мощность одной фазы приемника (или генератора). Активная мощность трехфазной системы равна сумме показаний трех ваттметров:

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Ваттметры трехфазного тока, устанавливаемые на распределительных щитах, представляют собой два (для трехпроводной системы) или три (для четырехпроводной системы) измерительных механизма, связанных общей осью и воздействующих на общую стрелку. Эти измерительные механизмы включаются в трехфазную цепь соответственно методам измерения при помощи двух или трех ваттметров.

3.7. СИММЕТРИЧНАЯ ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРИЕМНИКАМИ

Во многих случаях трехфазная цепь — симметричная (или близка к симметричной), но содержит несколько приемников, например несколько трехфазных двигателей, и требуется учесть сопротивления проводов.

Для расчета режима такой трехфазной цепи приемники следует заменить одним эквивалентным, фазы которого соединены звездой.

После определения линейного тока и фазного напряжения эквивалентного приемника можно найти фазные токи всех приемников.

В качестве примера рассмотрим трехфазную симметричную цепь (рис. 3.15, а) с двумя симметричными приемниками, фазы которых с комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_{\phi 1}$ и $\underline{Z}_{\phi 2}$ соединены треугольником. Приемники подключены к линии передачи с комплексными сопротивлениями проводов $\underline{Z}_\lambda$ и известным линейным напряжением U_λ в начале линии.

Одноименные фазы двух симметричных приемников соединены параллельно. Следовательно, приемники можно заменить одним эквивалентным симметричным, фазы которого соединены треугольником (рис. 3.15, б), с одинаковыми комплексными сопротивлениями

$$\underline{Z}_{\phi \Delta} = \underline{Z}_{\phi 1} \underline{Z}_{\phi 2} / (\underline{Z}_{\phi 1} + \underline{Z}_{\phi 2}),$$

где

$$\underline{Z}_{\phi 1} = r_{\phi 1} + jx_{\phi 1}; \quad \underline{Z}_{\phi 2} = r_{\phi 2} + jx_{\phi 2}.$$

Заменяем далее полученную симметричную цепь по схеме треугольника эквивалентной симметричной цепью по схеме звезды (рис. 3.15, в) с комплексным сопротивлением фазы по (1.23):

$$\underline{Z}_{\phi Y} = \frac{\underline{Z}_{\phi \Delta}}{3} = \frac{r_{\phi \Delta}}{3} + j \frac{x_{\phi \Delta}}{3}.$$

С учетом комплексного сопротивления проводов линии передачи вся цепь преобразована в эквивалентную симметричную цепь с фазами, соединенными звездой. Комплексное сопротивление фазы эквивалентной звезды

$$\underline{Z}_\phi = \underline{Z}_\lambda + \underline{Z}_{\phi Y} = r_\phi + jx_\phi.$$

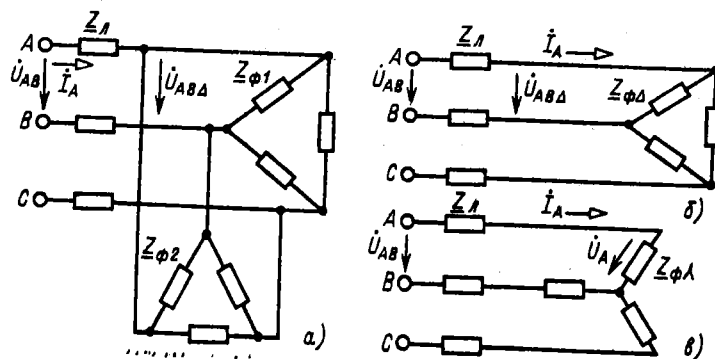


Рис. 3.15

и полное сопротивление

$$z_{\phi} = \sqrt{r_{\phi}^2 + x_{\phi}^2}.$$

Дальнейший расчет не требует применения комплексного метода. Достаточно сначала определить действующее значение линейного тока

$$I_{\phi} = U_{\phi} / z_{\phi} = U_{\phi} / (\sqrt{3} z_{\phi}),$$

а затем действующие значения фазного напряжения эквивалентной звезды приемников $U_{\phi Y} = z_{\phi Y} I_{\phi}$ и по (3.8) — линейного напряжения приемников $U_{\phi \Delta} = \sqrt{3} U_{\phi Y}$. Действующие значения фазных токов приемников

$$I_{\phi 1} = U_{\phi \Delta} / z_{\phi 1}; \quad I_{\phi 2} = U_{\phi \Delta} / z_{\phi 2}.$$

3.8. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Один из наиболее часто встречающихся случаев несимметричного режима трехфазной цепи получается при соединении фаз несимметричного приемника звездой без нейтрального провода или с нейтральным проводом, комплексное сопротивление которого Z_N необходимо учитывать при расчете. При заданном действующем значении линейного напряжения приемника $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\phi}$ можно дополнить трехфазную цепь воображаемым симметричным трехфазным источником ЭДС с фазами, соединенными звездой (рис. 3.16), с действующим значением фазной ЭДС $E_A = E_B = E_C = E_{\phi} = U_{\phi} / \sqrt{3}$.

Полученная цепь имеет две нейтральные точки: симметричного генератора N и несимметричного приемника n — два узла цепи. Поэтому для расчета режима цепи воспользуемся формулой межузлового напряжения, заменив в (1.28) проводимости ветвей цепи постоянного тока $g = 1/r$ комплексными проводимостями ветвей цепи синусоидального тока $Y = 1/Z$, а постоянные ЭДС и токи — комплексными значениями соответствующих синусоидальных ЭДС и токов. В рассчитываемой трехфазной системе комплексное значение напряжения $\dot{U}_{nN}$ между нейтральными точками приемника n и воображаемого генератора N называется *напряжением смещения нейтрали*. Это напряжение

$$\dot{U}_{nN} = \dot{\phi}_n - \dot{\phi}_N = \frac{Y_A \dot{E}_A + Y_B \dot{E}_B + Y_C \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}, \quad (3.24)$$

или с учетом (3.3) и равенства $E_\Phi = U_\Pi / \sqrt{3}$

$$\dot{U}_{nN} = \frac{U_\Pi (\underline{Y}_A + a^2 \underline{Y}_B + a \underline{Y}_C)}{\sqrt{3} (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N)}. \quad (3.25)$$

Фазные напряжения приемника определяются по второму закону Кирхгофа для трех контуров:

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{E}_A - \dot{U}_{nN}; & \dot{U}_B &= \dot{E}_B - \dot{U}_{nN}; \\ \dot{U}_C &= \dot{E}_C - \dot{U}_{nN}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

По закону Ома фазные токи и ток в нейтральном проводе соответственно равны

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \underline{Y}_A \dot{U}_A; & \dot{I}_B &= \underline{Y}_B \dot{U}_B; \\ \dot{I}_C &= \underline{Y}_C \dot{U}_C; & \dot{I}_N &= \underline{Y}_N \dot{U}_{nN}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Распределение напряжений между фазами несимметричного приемника, фазы которого соединены звездой, наглядно иллюстрирует потенциальная диаграмма цепи (рис. 3.17, а).

При построении потенциальной диаграммы равный нулю потенциал выбран у нейтральной точки N воображаемого генератора, которая служит началом отсчета. Из начала отсчета построены три вектора фазных ЭДС воображаемого генератора $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$. Концы этих векторов определяют комплексные значения потенциалов $\dot{\varphi}_A$, $\dot{\varphi}_B$ и $\dot{\varphi}_C$ линейных проводов A , B и C при $\dot{\varphi}_N = 0$, а следовательно, и линейных напряжений $\dot{U}_{AB} = \dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_B$, $\dot{U}_{BC} = \dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_C$, $\dot{U}_{CA} = \dot{\varphi}_C - \dot{\varphi}_A$. При симметричном приемнике нет смещения нейтрали, т. е. $\dot{U}_{nN} = 0$, и потенциал

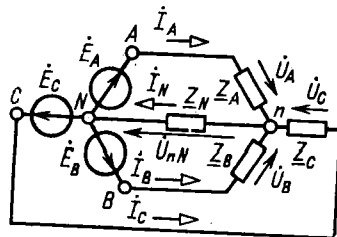


Рис. 3.16

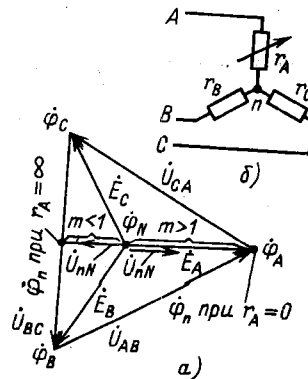


Рис. 3.17

нейтральной точки приемника $\dot{\varphi}_n = 0$. Поэтому на диаграмме потенциал нейтральной точки приемника $\dot{\varphi}_n$ совпадает с нейтральной точкой генератора $\dot{\varphi}_N$. При несимметричном приемнике смещение нейтрали $\dot{U}_{nN}$, как следует из (3.24), не равно нулю. Поэтому потенциал нейтральной точки приемника $\dot{\varphi}_n$ смещается относительно потенциала нейтральной точки генератора $\dot{\varphi}_N$, т. е. из центра треугольника линейных напряжений (смещение нейтрали).

Рассмотрим простейший случай приемника с активными сопротивлениями фаз r_A и $r_B = r_C = r$ при отсутствии нейтрального провода (рис. 3.17, б). Проводимости фаз B и C одинаковые: $g_B = g_C = g = 1/r$, а проводимость $g_A = 1/r_A$ фазы A изменяется от 0 до ∞ . Обозначим отношение $g_A/g = m$ и найдем напряжение смещения нейтрали по (3.24), учитывая (3.3):

$$\dot{U}_{nN} = \frac{g(m + a^2 + a)}{g(m + 2)} \dot{E}_A = \frac{m - 1}{m + 2} \dot{E}_A,$$

или

$$\dot{U}_{nN} = \frac{1 - 1/m}{1 + 2/m} \dot{E}_A.$$

При изменениях проводимости g_A в пределах от нуля до бесконечности множитель при ЭДС $\dot{E}_A$ остается действительной величиной. Следовательно, напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN}$ совпадает по фазе с ЭДС $\dot{E}_A$ при $m > 1$, а при $m < 1$ их фазы отличаются на π (рис. 3.17, а). В частности, при размыкании фазы A, т. е. $g_A = 0$ или $r_A = \infty$ и $m = 0$, смещение нейтрали

$$\dot{U}_{nN} = -\dot{E}_A/2.$$

При этом фазные напряжения приемника равны

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_{nN} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{U_\Pi}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{\sqrt{3}} U_\Pi;$$

$$\dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_{nN} = \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) U_\Pi = -j \frac{U_\Pi}{2};$$

$$\dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_{nN} = \left(a + \frac{1}{2}\right) U_\Pi = j \frac{U_\Pi}{2}.$$

Здесь учтено, что $U_\Pi = \sqrt{3} E_A$.

При $g_A = \infty$ или $r_A = 0$, т. е. коротком замыкании точек A и n (рис. 3.17, б), очевидно, будет $\dot{U}_A = 0$, $\dot{U}_B = \dot{U}_{BA} = -\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_C = \dot{U}_{CA}$.

Потенциал нейтральной точки приемника может сместиться далеко за пределы треугольника линейных напряжений, если проводимости фаз приемника, соединенных звездой без нейтрального провода, различны по характеру.

Рассчитаем, например, смещение нейтрали и фазные напряжения для приемника с комплексными проводимостями фаз $Y_A = jb_C$, $Y_B = -jb_L$, $Y_C = g$ при условии $g = b_C = b_L$ (рис. 3.18, а).

Смещение нейтрали по (3.24)

$$\dot{U}_{nN} = \frac{j b_C - j b_L a^2 + g a}{j b_C - j b_L + g} \dot{E}_A = (-1,37 + j 2,37) \dot{E}_A. \quad (3.28)$$

Фазные напряжения приемника рассчитываются так же, как и для приемника на рис. 3.17, б. Для действующих значений напряжений в результате расчета получается

$$U_A = 3,34 \frac{U_n}{\sqrt{3}}; \quad U_B = 3,34 \frac{U_n}{\sqrt{3}}; \quad U_C = U_n.$$

Потенциальная диаграмма показана на рис. 3.18, б.

Цепь на рис. 3.18, а имеет важное свойство, которое используется в различных устройствах. Если емкостная проводимость фазы A и индуктивная проводимость фазы B одинаковые и постоянные: $b_L = b_C = b = \text{const}$, то ток в фазе C не зависит от значения активной проводимости $g = \text{var}$ этой фазы. Действительно, из векторной диаграммы на рис. 3.18, б и формулы (3.28) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= (\dot{E}_C - \dot{U}_{nN}) = a \dot{E}_A - \left(j \frac{b}{g} (1 - a^2) - a \right) \dot{E}_A = \\ &= j \frac{b}{g} (a^2 - 1) \dot{E}_A, \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{I}_C = \dot{U}_C g = j b (a^2 - 1) \dot{E}_A = \text{const}.$$

Фазные токи несимметричного приемника, фазы которого соединены треугольником (рис. 3.19), при заданных линейных напряжениях определяются по закону Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / Z_{AB}; \quad \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / Z_{BC}; \quad \dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / Z_{CA}.$$

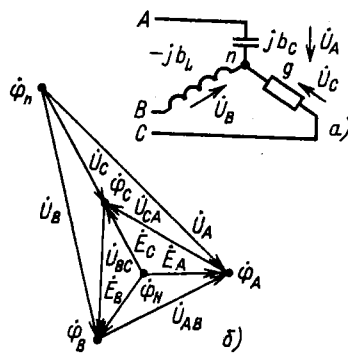


Рис. 3.18

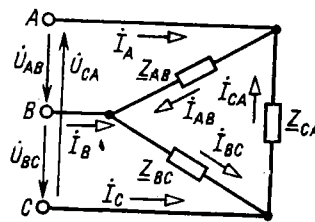


Рис. 3.19

Линейные токи рассчитываются на основании первого закона Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$$

При расчете более сложной несимметричной трехфазной цепи, например изображенной на рис. 3.15, а, с несимметричными приемниками все приемники путем преобразований заменяются эквивалентным, фазы которого соединены звездой. Эти преобразования выполняются в той же последовательности, что и для симметричных приемников (рис. 3.15, б и в), но сопротивление каждой фазы эквивалентного приемника приходится вычислять отдельно.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Синусоидальные колебания являются самой простой формой периодического процесса. В сетях электроэнергетических систем принимается ряд мер для поддержания синусоидальной формы переменных токов и напряжений и устранения различных отклонений от синусоидальной формы. Но, например, в цепях электросвязи, электронных и полупроводниковых устройств отклонение от синусоидальной формы часто обусловлено самим рабочим процессом устройства. Поэтому знание элементов теории несинусоидальных периодических токов необходимо для понимания принципов действия устройств автоматики, электронных приборов и самой различной аппаратуры новой техники.

Периодическая несинусоидальная функция удовлетворяет условию $f(t) = f(t + kT)$, где T — период функции, т. е. промежуток времени, по истечении которого весь процесс повторяется сначала; k — целое число.

Такая периодическая функция, как известно из курса математики, может быть представлена в виде гармонического ряда (ряда Фурье), в общем случае неограниченного, но при расчетах электрических цепей часто с конечным числом n гармонических (синусоидальных) составляющих или, короче, гармоник. Например, несинусоидальный периодический ток

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_{i2}) + \dots \\ \dots + I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_{in}),$$

или

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}). \quad (4.1)$$

В этом выражении I_0 — постоянная составляющая (постоянный ток); $I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1})$ — первая (основная) гармоника, частота которой равна частоте несинусоидальной периодической функции — тока i ; все остальные слагаемые называют высшими гармониками; ψ_{ik} — начальная фаза k -й гармонической составляющей, зависящая от начала отсчета времени ($t = 0$). Таким образом, периодический несинусоидальный ток можно представить в виде суммы постоянного тока и синусоидальных токов различных частот, кратных частоте первой гармоники, с различными начальными фазами. Такое представление часто применяется при расчетах цепей периодических несинусоидальных токов.

На рис. 4.1 приведен график периодического несинусоидального тока i , который содержит только первую i_1 и вторую i_2 гармоники. Аналогично (4.1) записываются разложения в гармонический ряд периодических несинусоидальных напряжений на любом участке цепи:

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}), \quad (4.2)$$

ЭДС источников:

$$e = E_0 + \sum_{k=1}^n E_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ek})$$

и других величин.

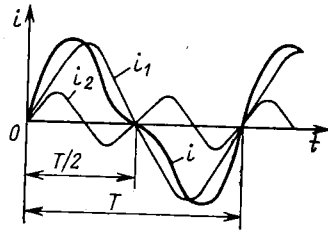


Рис. 4.1

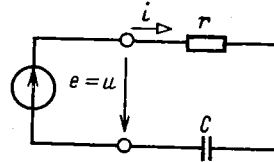


Рис. 4.2

Для расчета режима линейной цепи периодического несинусоидального тока (цепи, у которой параметры элементов r , L , C не зависят от тока и напряжения) применим метод наложения (см. § 1.12): каждую из гармонических составляющих и постоянную составляющую (если она есть) определим отдельно (независимо).

В качестве примера рассмотрим расчет тока в цепи по рис. 4.2 при заданном напряжении источника периодической несинусоидальной ЭДС:

$$u = e = U_{1m} \sin \omega t + U_{5m} \sin(5\omega t + \psi_{u5}).$$

Ток в этой цепи

$$i = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{5m} \sin(5\omega t + \psi_{u5} - \varphi_5),$$

где по закону Ома для первой гармоники $I_{1m} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{r^2 + (1/\omega C)^2}}$,

для пятой гармоники $I_{5m} = \frac{U_{5m}}{\sqrt{r^2 + (1/5\omega C)^2}}$ и по (2.49б)

$$\varphi_1 = \arctg(-1/\omega Cr); \quad \varphi_5 = \arctg(-1/5\omega Cr).$$

При определении каждой из гармонических составляющих можно применять любые методы расчета цепей синусоидального тока, в том числе и комплексный.

4.2. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Мгновенные значения токов и других величин можно рассчитать, как было отмечено выше, с применением метода наложения. Но практически весьма важно вычислить и действующие значения токов (напряжений, ЭДС), измеряемых амперметрами (вольтметрами).

Приведенное в § 2.6 определение действующего значения [см. (2.17)] на основании сопоставления с тепловым действием постоянного тока

справедливо для любого периодического тока. Поэтому действующее значение периодического несинусоидального тока определим выражением

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (4.3)$$

Учитывая (4.1), интеграл

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T i i dt$$

можно представить в виде суммы интегралов четырех типов:

$$1) \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_{ik}) dt = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2,$$

так как этот интеграл по определению равен квадрату действующего значения I_k гармонической составляющей тока k -го порядка;

$$2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_0 I_0 dt = I_0^2$$

— это квадрат постоянной составляющей тока;

$$\begin{aligned} 3) \quad & \frac{1}{T} \int_0^T I_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) dt = \\ & = \frac{1}{T} I_0 I_{km} \int_0^T \sin(k\omega t + \psi_{ik}) dt = 0, \end{aligned}$$

так как интеграл от синусоидальной величины за целое число периодов равен нулю;

$$4) \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_{km} I_{lm} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) \sin(l\omega t + \psi_{il}) dt = 0,$$

где k и l — номера гармоник, причем $k \neq l$; интеграл равен нулю, так как произведение синусоидальных функций можно заменить разностью косинусоидальных:

$$\sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{2} [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)],$$

т. е. подынтегральное выражение интеграла 4-го типа является разностью двух косинусоидальных функций, интеграл каждой из которых за целое число периодов равен нулю.

Таким образом, действующее значение периодического несинусоидального тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2},$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^n I_k^2}, \quad (4.4)$$

т. е. действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадрату из суммы квадратов постоянной составляющей и квадратов действующих значений всех гармонических составляющих. Так же определяется действующее значение периодического несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^n U_k^2} \quad (4.5)$$

и аналогично любой другой периодической несинусоидальной величины.

4.3. МОЩНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Выражение мгновенной мощности

$$p = ui \quad (4.6)$$

справедливо для токов и напряжений с любой формой кривой.

Активная мощность любого периодического тока по определению равна среднему за период значению мгновенной мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt. \quad (4.7)$$

После подстановки в (4.6) напряжения u [см. (4.2)] и тока i [см. (4.1)] в виде рядов активная мощность будет представлена суммой интегралов таких же четырех типов, которые были рассмотрены при определении действующего значения периодического несинусоидального тока:

$$1) \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) \, dt = U_k I_k \cos \varphi_k,$$

где

$$\varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}$$

(вычисление интеграла см. в § 2.14);

$$2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0;$$

$$3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) dt = 0;$$

$$4) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) I_{lm} \sin(l\omega t + \psi_{il}) dt = 0$$

при $k \neq l$.

Таким образом, активная мощность

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^n U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (4.8)$$

т. е. активная мощность периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей всех гармонических составляющих и мощности постоянных составляющих напряжения и тока (мощности постоянного тока).

Реактивной мощностью периодических несинусоидальных токов можно условно считать величину

$$Q = \sum_{k=1}^n U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (4.9)$$

Полная мощность периодического несинусоидального тока определяется также условно:

$$S = UI > \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

4.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

В цепи периодического несинусоидального тока для различных гармонических составляющих этого тока индуктивные сопротивления катушек $k\omega L$ и емкостные сопротивления конденсаторов $1/k\omega C$ зависят от номера k гармонической составляющей.

На зависимости индуктивных и емкостных сопротивлений от частоты основан принцип работы *электрических фильтров* — устройств, при помощи которых гармонические составляющие токов и напряжений определенной частоты или в пределах определенной полосы частот значительно уменьшаются.

А. Сглаживающие фильтры. Сглаживающие фильтры служат для уменьшения процентного содержания на сопротивлении нагрузки гармонических составляющих выпрямленного напряжения или снижения процентного содержания высших гармоник в кривой переменного напряжения.

Рассмотрим работу простейшего сглаживающего фильтра (рис. 4.3), представляющего собой пассивный линейный четырехполюсник, к выходным выводам которого подключен приемник с сопротивлением нагрузки r_{2H} . Коэффициент передачи напряжения [см. (2.90а)] фильтра, цепь которого вместе с приемником представляет собой цепь со смешанным соединением ветвей (см. § 2.18), равен

$$\underline{K}_u = \frac{1}{1 + r/r_{2H} + j\omega rC}.$$

Соответствующая амплитудно-частотная характеристика фильтра

$$K_u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega rC)^2 + (1 + r/r_{2H})^2}}$$

приведена на рис. 4.4. Чем выше частота гармоники напряжения на входе $u_{вх}$ фильтра, тем меньше ее процентное содержание в напряжении на его выходе $u_{вых}$ (рис. 4.5). Аналогичными свойствами обладает сглаживающий фильтр по схеме на рис. 4.6.

Б. Резонансные фильтры. В резонансных фильтрах используются явления резонансов напряжений и токов в электрических цепях (см. § 2.21) для выделения или исключения в кривой напряжения на приемнике определенной полосы частот. Соответствующие фильтры называются *полосовыми* и *заградительными*.

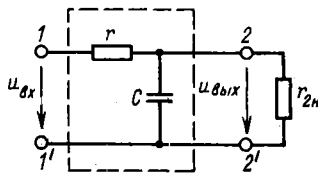


Рис. 4.3

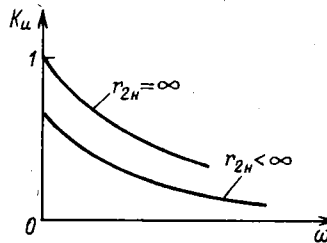


Рис. 4.4

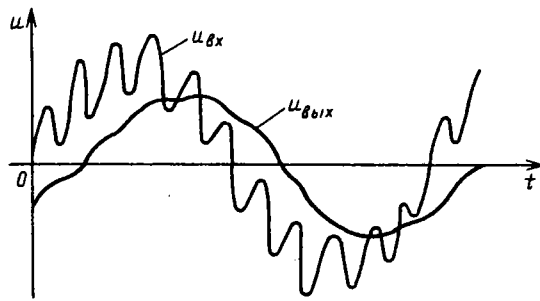


Рис. 4.5

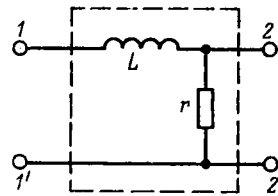


Рис. 4.6

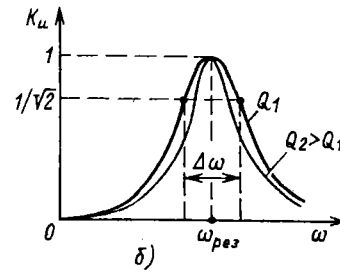
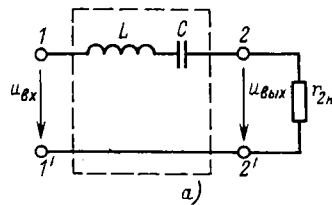


Рис. 4.7

На рис. 4.7, а приведена схема простейшего полосового фильтра на основе явления резонанса напряжений, а на рис. 4.7, б — его амплитудно-частотная характеристика, найденная по формуле (2.76в):

$$K_u(\omega) = \frac{r_{2H}}{\sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + r_{2H}^2}}.$$

Ширина полосы частот $\Delta\omega$, выделяемая фильтром, на уровне $K_u = 1/\sqrt{2}$ тем меньше, чем больше добротность цепи $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{r_{2H}}$.

В заградительном фильтре по схеме на рис. 4.8, а используется явление резонанса токов. Его амплитудно-частотная характеристика

$$K_u(\omega) = \frac{r_{2H} |1 - \omega^2 LC|}{\sqrt{(\omega L)^2 + r_{2H}^2 (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

приведена на рис. 4.8, б. Ширина полосы частот $\Delta\omega$, заграждаемых фильтром, определяется на уровне $K_u = 1/\sqrt{2}$.

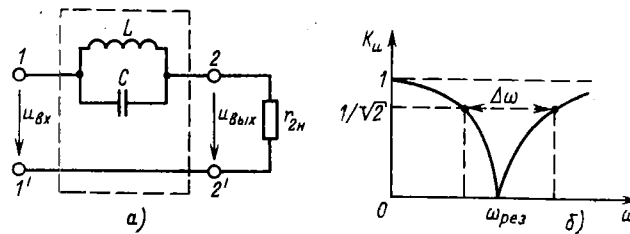


Рис. 4.8

Комбинации явлений резонансов напряжений и токов в различных ветвях фильтра позволяют создавать полосовые и заградительные фильтры высокого качества.

В. Избирательные rC -фильтры. Фильтры, содержащие только резисторы и конденсаторы, называются rC -фильтрами. Отсутствие в них индуктивных элементов делает их привлекательными для реализации в виде интегральных микросхем. Примером полосового rC -фильтра может служить четырехполюсник (рис. 4.9, а), называемый *мостом Вина*, с коэффициентом передачи напряжения при разомкнутой цепи нагрузки

$$K_u = Z_2 / (Z_1 + Z_2), \quad (4.10)$$

где $Z_1 = -j/(\omega C_1) + r_1$ и $Z_2 = 1/(1/r_2 + j\omega C_2)$ — комплексные сопротивления.

Амплитудно-частотная $K_u(\omega)$ и фазочастотная $\theta_u(\omega)$ характеристики моста Вина приведены на рис. 4.9, б. Максимальное значение амплитудно-частотной характеристики равно $1/3$ и достигается при угловой частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2 C_1 C_2}}. \quad (4.11)$$

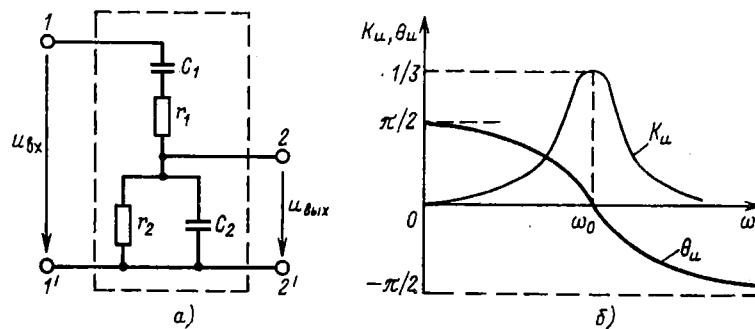


Рис. 4.9

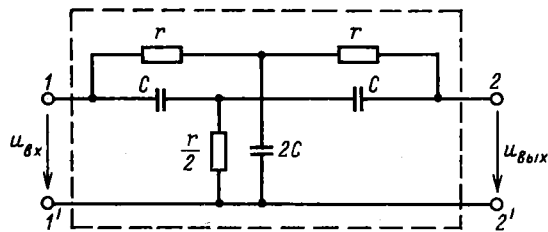


Рис. 4.10

При этом фазочастотная характеристика пересекает ось абсцисс, т. е. $\theta = 0$.

Заградительный rC -фильтр можно реализовать при помощи двойного Т-образного моста (рис. 4.10). При разомкнутой цепи нагрузки минимуму его амплитудно-частотной характеристики соответствует угловая частота $\omega_0 = 1/(rC)$. Доказательство этого условия достаточно трудоемкое и здесь не приводится.

Возможны и другие схемотехнические решения избирательных rC -фильтров.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Переходные процессы возникают в электрических цепях при различных воздействиях, приводящих к изменению их режима работы, т. е. при действии различного рода коммутационной аппаратуры, например ключей, переключателей для включения или отключения источника или приемника энергии, при обрывах в цепи, при коротких замыканиях отдельных участков цепи и т. д.

Отметим, что физической причиной возникновения переходных процессов в цепях является наличие в них катушек индуктивности и конденсаторов, т. е. индуктивных и емкостных элементов в соответствующих схемах замещения. Объясняется это тем, что энергия магнитного [см. (2.5)] и электрического [см. (2.13)] полей этих элементов не может изменяться скачком при коммутации в цепи.

Переходный процесс в цепи описывается дифференциальным уравнением — неоднородным или однородным, если ее схема замещения содержит или не содержит источники ЭДС и тока. Заметим, что переходный процесс в линейной цепи описывается линейными дифференциальными уравнениями, а в нелинейной — нелинейными.

В дальнейшем ограничимся расчетом переходных процессов в линейных цепях, содержащих элементы с постоянными параметрами.

Для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами разработаны различные аналитические методы: классический, оперативный, метод интеграла Фурье и др., которые применяются и для расчета переходных процессов. Ограничимся применением классического и операторного методов. Первый обладает физической наглядностью и удобен для расчета простых цепей, а второй упрощает расчет сложных цепей.

5.2. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Название метода "классический" отражает использование в нем решений дифференциальных уравнений с постоянными параметрами методами классической математики.

Расчет переходного процесса в цепи классическим методом содержит следующие этапы.

1. Прежде всего необходимо составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и т. д., описывающих состояние цепи после коммутации, и исключением переменных получить одно дифференциальное уравнение, в общем случае неоднородное относительно искомого тока i или напряжения u . Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на емкостном элементе.

2. Далее следует составить общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения цепи в виде суммы частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Применительно к электрическим цепям в качестве частного решения неоднородного дифференциального уравнения выбирают установившийся режим в рассматриваемой цепи (если он существует), т. е. постоянные токи и напряжения, если в цепи действуют источники постоянных ЭДС и токов, или синусоидальные напряжения и токи при действии источников синусоидальных ЭДС и токов. Токи и напряжения установившегося режима обозначают i_y и u_y и называют *установившимися*.

Общее решение однородного дифференциального уравнения описывает процесс в цепи без источников ЭДС и тока, который поэтому называют *свободным процессом*. Токи и напряжения свободного процесса обозначают $i_{св}$ и $u_{св}$ и называют *свободными*, а их выражения должны содержать постоянные интегрирования, число которых равно порядку однородного уравнения.

Свободный процесс вызывается несоответствием между энергией, сосредоточенной в электрическом и магнитном полях емкостных и индуктивных элементов в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации, и энергией этих элементов при новом установившемся режиме в момент времени, непосредственно следующий за коммутацией. Энергия элементов не может измениться скачком, и ее постепенное изменение обуславливает переходный процесс.

3. Наконец, в общем решении $i = i_y + i_{св}$, $u = u_y + u_{св}$ следует найти постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяют из *начальных условий*, т. е. условий в цепи в начальный момент времени после коммутации. Будем считать коммутационные ключи идеальными, т. е. что коммутация в заданный момент времени t происходит мгновенно. При таких коммутациях ток в индуктивном элементе и напряжение на емкостном элементе в начальный момент времени после коммутации t_+ такие же, как в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации t_- . Эти условия получаются из законов коммутации.

5.3. ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

Законы коммутации утверждают, что ток в индуктивном элементе и напряжение на емкостном элементе не могут изменяться скачком.

Докажем сначала закон коммутации для индуктивного элемента. Предположим, что в течение интервала времени от момента t_1 до момента t_2 ток в индуктивном элементе изменяется от значения $i_L(t_1)$ до значения $i_L(t_2)$. При этом средняя мощность изменения энергии магнитного поля индуктивного элемента [см. (2.5)] будет равна

$$\frac{\Delta W_M}{\Delta t} = \frac{L}{2} \frac{i_L^2(t_2) - i_L^2(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Если интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$, в течение которого происходит изменение тока в индуктивном элементе, стремится к нулю и $i_L(t_2) \neq i_L(t_1)$, то средняя мощность изменения энергии магнитного поля стремится к бесконечности.

Так как цепей бесконечно большой мощности не существует, то *изменение тока в индуктивном элементе скачком невозможно*. Этот вывод и является законом коммутации для индуктивного элемента, который можно записать в следующем виде:

$$i_L(t_-) = i_L(t_+), \quad (5.1)$$

где t — момент времени, в который произошла коммутация в цепи.

Закон коммутации для емкостного элемента легко получить по аналогии с доказанным законом коммутации для индуктивного эле-

мента. Действительно, сравнивая выражения для энергии магнитного поля индуктивного элемента $W_M = Li_L^2/2$ и энергии электрического поля емкостного элемента $W_C = Cu_C^2/2$ [см. (2.13)], видим, что относительно тока i_L и напряжения u_C они аналогичны. Следовательно, анализ энергетических процессов в емкостном элементе приведет к выводу: *изменение напряжения на емкостном элементе скачком невозможно*, т. е.

$$u_C(t_-) = u_C(t_+), \quad (5.2)$$

где t — момент времени, в который произошла коммутация в цепи.

Те же законы коммутации следуют из соотношений $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ и $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, так как при изменении скачком тока i_L и напряжения u_C получаются бесконечно большие значения напряжения u_L и тока i_C , что нарушает выполнение законов Кирхгофа.

Токи в индуктивных элементах $i_L(t_-)$ и напряжения на емкостных элементах $u_C(t_-)$ непосредственно перед коммутацией называются *начальными условиями*.

Если токи в индуктивных элементах и напряжения на емкостных элементах цепи в момент времени t_- равны нулю, т. е. $i_L(t_-) = 0$; $u_C(t_-) = 0$, то эти условия называются *нулевыми начальными условиями*. В противном случае получаются *ненулевые начальные условия*.

5.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИНДУКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рассмотрим несколько примеров переходных процессов, возникающих при коммутации в цепи постоянного тока с одним индуктивным элементом.

А. Подключение источника постоянной ЭДС к неразветвленной цепи с резистивным и индуктивным элементами. Проанализируем переходный процесс в цепи при замыкании ключа K в момент времени $t = 0$ (рис. 5.1, а), выполнив последовательно все этапы расчета классическим методом (см. § 5.2). В дальнейшем для сокращения решений математические операции отдельных этапов будем совмещать.

1. При выбранных положительных направлениях тока i и напряжений u_r и u_L составим систему уравнений, описывающих состояние цепи на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и Закона электромагнитной индукции:

$$u_L + u_r = E; \quad u_L = L di/dt; \quad u_r = ri. \quad (5.3)$$

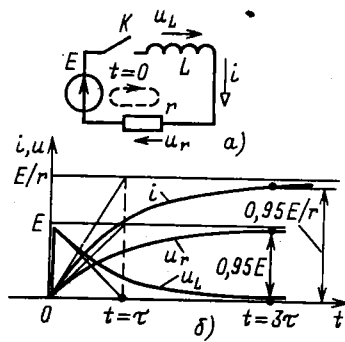


Рис. 5.1

Исключая из системы уравнений (5.3) переменные u_r и u_L , получаем неоднородное дифференциальное уравнение переходного процесса первого порядка

$$L di/dt + ri = E. \quad (5.4)$$

2. Найдем общее решение неоднородного дифференциального уравнения (5.4) как сумму его частного решения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$L di/dt + ri = 0. \quad (5.5)$$

Частным решением неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (5.4) является постоянный ток (нет изменения тока и $di/dt = 0$) после окончания переходного процесса (который теоретически продолжается бесконечно), т. е.

$$i_y = E/r, \quad (5.6)$$

называемый *установившимся током*.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что это частное решение удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению (5.4).

Общее решение однородного дифференциального уравнения (5.5) называется *свободным током*

$$i_{св} = Ae^{pt}, \quad (5.7)$$

где $p = -r/L$ – корень характеристического уравнения

$$Lp + r = 0. \quad (5.8)$$

Таким образом, с учетом (5.6) и (5.7) *общее решение* неоднородного дифференциального уравнения (5.4) имеет вид

$$i = i_y + i_{св} = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (5.9)$$

3. Определим постоянную интегрирования A в общем решении (5.9). Для этого обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента (5.1) в момент времени замыкания ключа $t = 0$. Так как ток

в индуктивном элементе не может измениться скачком, а до коммутации, т. е. в момент $t = 0_-$, он был равен нулю, то

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = E/r + A,$$

откуда

$$A = -E/r. \quad (5.10)$$

Подставив это значение постоянной A в (5.9), получим закон нарастания тока в цепи (рис. 5.1, б):

$$i = \frac{E}{r} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (5.11)$$

где $\tau = L/r$ имеет размерность времени (Гн/Ом или с) и называется *постоянной времени* цепи. Постоянная времени определяет скорость нарастания тока и равна времени, за которое ток i достиг бы установившегося значения $i_y = E/r$, если бы скорость его изменения оставалась неизменной и равной начальному значению скорости $di/dt|_{t=0_+} = E/L$.

Переходный процесс часто можно считать практически закончившимся через интервал времени 3τ с момента коммутации, когда ток достигнет значения $i(3\tau) = 0,95E/r$.

Так как зависимость тока от времени найдена (5.11), то нетрудно определить и зависимости от времени напряжений на резистивном и индуктивном элементах (рис. 5.1, б):

$$u_r = ri = E(1 - e^{-t/\tau}); \quad u_L = L \frac{di}{dt} = Ee^{-t/\tau}.$$

При $0 \leq t < \tau$ скорость изменения тока в цепи можно считать приближенно постоянной и равной $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{L}$. Следовательно, в этом

интервале времени приближенно напряжение на резистивном элементе равно

$$u_r \approx \frac{r}{L} Et = \frac{r}{L} \int_0^t E dt,$$

т. е. пропорционально интегралу напряжения источника ЭДС E . Такую цепь принято называть *интегрирующей цепью*.

При действии на входе цепи источника изменяющейся ЭДС e может оказаться, что в некоторые интервалы времени переходного процесса $u_r \gg u_L$. Для этих интервалов времени ток в цепи $i \approx e/r$, а напряжение на индуктивном элементе $u_L = L \frac{di}{dt} \approx \frac{L}{r} \frac{de}{dt}$ приближенно пропор-

ционально скорости изменения напряжения источника ЭДС e . Имея это в виду, эту же цепь называют *дифференцирующей цепью*.

Б. Короткое замыкание катушки индуктивности с током. Рассмотрим переходный процесс в цепи катушки индуктивности с током, обладающей кроме индуктивности L также сопротивлением r , при замыкании ее накоротко ключом K . Подобные условия имеют место в обмотках электрических машин и аппаратов. Для этого представим катушку индуктивности схемой замещения в виде последовательного соединения индуктивного и резистивного элементов (рис. 5.2, а).

Запишем дифференциальное уравнение переходного процесса в цепи после замыкания ключа:

$$u_L + u_r = L di/dt + ri = 0. \quad (5.12)$$

Так как дифференциальное уравнение (5.12) однородное [совпадает с уравнением (5.5)], то его общее решение содержит только свободную составляющую (5.7):

$$i = i_{св} = Ae^{-t/\tau}, \quad (5.13)$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени цепи.

Осталось найти значение постоянной A . Для этого опять обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента (5.1). Так как до замыкания ключа и, следовательно, в момент времени $t = 0_-$ в катушке был постоянный ток, равный $E/(r + R)$, то

$$i(0_-) = E/(r + R) = i(0_+) = A.$$

Подставив значение постоянной A в (5.13), получим ток в катушке индуктивности:

$$i = \frac{E}{r + R} e^{-t/\tau}. \quad (5.14)$$

Ток в катушке индуктивности после коммутации (рис. 5.2, б) поддерживается за счет энергии, накопленной в ее магнитном поле.

Теперь можно определить и зависимости от времени напряжений на резистивном и индуктивном элементах (рис. 5.2, б):

$$u_r = ri = \frac{rE}{r + R} e^{-t/\tau};$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = - \frac{rE}{r + R} e^{-t/\tau}.$$

В. Размыкание цепи с катушкой индуктивности. При размыкании неразветвленной электрической цепи с катушкой индуктивности меж-

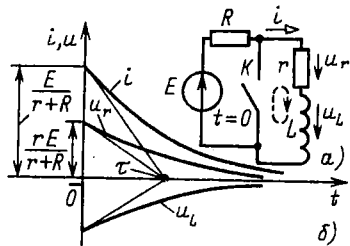


Рис. 5.2

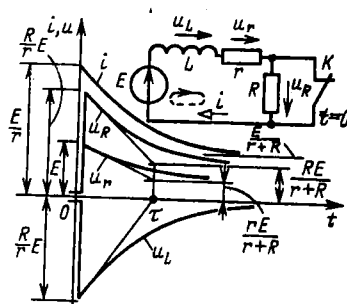


Рис. 5.3

ду размыкающимися контактами возникает дуговой разряд. Такой разряд наблюдается, например, в скользящих контактах электрического транспорта. Чтобы дугового разряда не было, необходимо параллельно участку цепи между контактами включить резистор. На рис. 5.3, а приведена схема замещения электрической цепи, в которой катушка индуктивности представлена последовательным соединением индуктивного L и резистивного r элементов, а выключатель представлен в виде параллельного соединения идеального ключа и резистивного элемента R .

Составим дифференциальное уравнение переходного процесса цепи после размыкания ключа:

$$u_L + u_r + u_R = L di/dt + (r + R)i = E. \quad (5.15)$$

Это дифференциальное уравнение полностью совпадает (с точностью до обозначений элементов) с уравнением (5.4). Следовательно, его общее решение аналогично (5.9):

$$i = i_y + i_{св} = \frac{E}{r + R} + Ae^{-\frac{r + R}{L}t}, \quad (5.16)$$

где $i_y = E/(r + R)$ — установившаяся составляющая тока, равная постоянному току в цепи после размыкания ключа.

Для определения постоянной A в (5.16) обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента (5.1). До размыкания ключа, т. е. и при $t = 0_-$, в катушке был постоянный ток E/r . Поэтому по закону коммутации

$$i(0_-) = E/r = i(0_+) = E/(r + R) + A,$$

откуда

$$A = E/r - E/(r + R) = RE/r(r + R).$$

Подставив значение постоянной A в (5.16), найдем ток в цепи катушки индуктивности после размыкания ключа (рис. 5.3, б):

$$i = \frac{E}{r + R} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau} \right), \quad (5.17)$$

где $\tau = L/(r + R)$ — постоянная времени цепи.

Зная ток в цепи, нетрудно определить зависимости от времени напряжений на резистивном и индуктивном элементах (рис. 5.3, б):

$$u_r = ri = \frac{rE}{r + R} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau} \right);$$

$$u_R = Ri = \frac{RE}{r + R} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau} \right);$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{R}{r} E e^{-t/\tau}.$$

В первый момент времени после размыкания ключа $t = 0_+$ напряжение на резистивном элементе R скачком возрастает от нуля $u_R(0_-) = 0$ до $u_R(0_+) = ER/r$. Поэтому при $R \gg r$ между контактами ключа появляется значительное напряжение, которое и может вызвать дуговой разряд.

5.5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ЕМКОСТНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рассмотрим процессы в цепи при зарядке и разрядке емкостного элемента.

А. Зарядка емкостного элемента от источника постоянной ЭДС через резистивный элемент. Переходный процесс в цепи на рис. 5.4 описывается неоднородным дифференциальным уравнением на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома $u_r = ri$ и соотношения между током зарядки и напряжением в емкостном элементе $i = C du_C/dt$ [см. (2.11)], т. е.

$$u_r + u_C = ri + u_C = rC \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (5.18)$$

Общее решение уравнения (5.18) представляет собой сумму двух составляющих:

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв}.$$

Первая составляющая соответствует установившемуся режиму

$$u_{Cy} = E, \quad (5.19)$$

так как зарядка емкостного элемента закончится, когда напряжение u_C будет равно напряжению источника ЭДС.

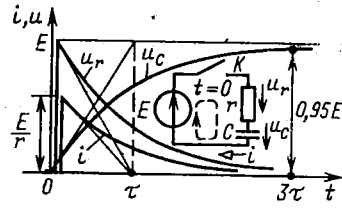


Рис. 5.4

Вторая составляющая соответствует свободному процессу, т. е. решению однородного дифференциального уравнения первого порядка

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

и равна

$$u_{Cсв} = Ae^{pt}, \quad (5.20)$$

где $p = -1/rC$ — корень характеристического уравнения

$$rCp + 1 = 0.$$

Таким образом, общее решение будет иметь вид

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = E + Ae^{-t/rC}. \quad (5.21)$$

Для определения значения постоянной A в (5.21) обратимся к закону коммутации для емкостного элемента (5.2). Будем считать, что до замыкания ключа, т. е. в момент времени $t = 0_-$, емкостный элемент не был заряжен. Поэтому

$$u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+) = E + A,$$

откуда $A = -E$.

Подставив значение постоянной A в (5.21), найдем напряжение на емкостном элементе во время зарядки (рис. 5.4, б):

$$u_C = E(1 - e^{-t/\tau}), \quad (5.22)$$

где $\tau = rC$ имеет размерность времени ($\text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с/В} = \text{с}$) и называется *постоянной времени* цепи. Она, как и постоянная времени цепи на рис. 5.1, определяет скорость переходного процесса.

Зависимость от времени напряжения на емкостном элементе [см. (5.22)] определяет зависимости от времени зарядного тока и напряжения на резистивном элементе (рис. 5.4):

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{r} e^{-t/\tau}; \quad u_r = ri = Ee^{-t/\tau}.$$

Заметим, что в первый момент после замыкания ключа, т. е. при $t = 0_+$, ток в цепи $i(0_+) = E/r$; емкостный элемент в этот момент времени как бы коротко замкнут (напряжение на нем равно нулю). Поэтому при малом значении сопротивления r в цепи может наблюдаться значительный скачок тока.

При $0 \leq t \leq \tau$ скорость изменения напряжения на емкостном элементе можно приближенно считать постоянной: $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{rC}$, а

напряжение $u_C \approx \frac{E}{rC} t = \frac{1}{rC} \int_0^t E dt$ — пропорциональным интегралу напряжения источника ЭДС E .

Если на входе цепи действует источник изменяющейся ЭДС e , то может оказаться, что для моментов времени переходного процесса, в которые $u_r \ll u_C$, приближенно $u_C \approx e$, а $u_r = ri = rC \frac{du_C}{dt} \approx rC de/dt$ пропорционально скорости изменения напряжения источника. Следовательно, цепь с последовательным соединением резистивного и емкостного элементов, так же как и цепь с последовательным соединением резистивного и индуктивного элементов, рассмотренную выше, при определенных условиях можно рассматривать и как интегрирующую, и как дифференцирующую.

В большинстве случаев процесс зарядки можно считать практически закончившимся через интервал времени, равный 3τ . Этот интервал времени может быть достаточно большим (чем больше r и C , тем больше τ), что широко используется, например, в реле времени — устройствах, срабатывающих по истечении определенного времени.

Б. Разрядка емкостного элемента через резистивный элемент. В электрическом поле заряженного емкостного элемента сосредоточена энергия [см. (2.13)], за счет которой емкостный элемент в течение некоторого времени сам может служить источником энергии. После подключения емкостного элемента, предварительно заряженного до напряжения $u_C = E$, к резистивному элементу с сопротивлением r (рис. 5.5, а) ток в цепи будет обусловлен изменением заряда q емкостного элемента (2.11):

$$i = - \frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}, \quad (5.23)$$

где знак минус указывает, что ток i — это ток разрядки в контуре цепи, обозначенном на рисунке штриховой линией, направленный навстречу напряжению на емкостном элементе.

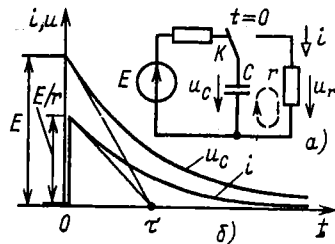


Рис. 5.5

Составим дифференциальное уравнение переходного процесса в контуре цепи, обозначенном на рис. 5.5, *а* штриховой линией, на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и соотношения (5.23):

$$u_r - u_C = ri - u_C = rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (5.24)$$

Так как в цепи разрядки емкостного элемента нет источника ЭДС, то дифференциальное уравнение (5.24) однородное и его общее решение состоит только из свободной составляющей (5.20):

$$u_C = u_{C_{св}} = A e^{-t/(rC)}. \quad (5.25)$$

Для определения постоянной A в (5.25) обратимся к закону коммутации для емкостного элемента (5.2). Так как до коммутации, т. е. и в момент времени $t = 0_-$, емкостный элемент был заряжен до напряжения источника, то

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A.$$

Подставив значение постоянной A в (5.25), получим закон изменения напряжения при разрядке емкостного элемента (рис. 5.5, *б*):

$$u_C = E e^{-t/\tau},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени цепи.

Разрядный ток найдем по (5.23):

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{r} e^{-t/\tau}.$$

Ток разрядки скачком изменяется от нуля до значения $i(0_+) = E/r$, а затем убывает по экспоненциальному закону (рис. 5.5, *б*).

5.6. РАЗРЯДКА ЕМКОСТНОГО ЭЛЕМЕНТА В ЦЕПИ С РЕЗИСТИВНЫМ И ИНДУКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТАМИ

Большое практическое значение имеет цепь разрядки емкостного элемента через последовательно соединенные индуктивный и резистивный элементы, например в генераторах импульсов напряжений с конденсаторами в качестве источников энергии.

Предположим, что емкостный элемент C (рис. 5.6) был сначала заряжен от источника постоянной ЭДС до напряжения, равного E (ключ K в положении 1). Затем ключ K переводится в положение 2 и емкостный элемент подключается к последовательно соединенным индуктивному L и резистивному r элементам (эти элементы практически могут быть элементами схемы замещения катушки индуктивности).

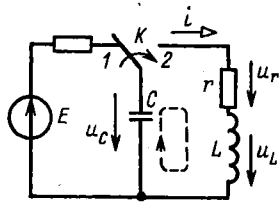


Рис. 5.6

Емкостный элемент начинает разряжаться (ток разрядки i), его заряд q и напряжение u_C убывают. При этом энергия электрического поля емкостного элемента преобразуется в энергию магнитного поля индуктивного элемента и частично рассеивается в резистивном элементе.

Запишем для контура цепи, обозначенного штриховой линией, дифференциальное уравнение на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и закона электромагнитной индукции:

$$-u_C + u_r + u_L = -u_C + ri + L \frac{di}{dt} = 0. \quad (5.26)$$

Так как положительные направления тока и напряжения на емкостном элементе противоположны, т. е. ток i — это ток разрядки, то, как и для цепи на рис. 5.5, а,

$$i = -C \frac{du_C}{dt}. \quad (5.27)$$

После подстановки (5.27) в (5.26) получим однородное дифференциальное уравнение цепи второго порядка:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad (5.28)$$

характеристическое уравнение которого

$$LCp^2 + rCp + 1 = 0. \quad (5.29)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (5.28) состоит только из свободной составляющей:

$$u_C = u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (5.30)$$

где $p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ — корни характеристического уравнения (5.29).

В зависимости от значений параметров элементов цепи процесс разрядки может быть аperiodическим или колебательным.

При $\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ оба корня характеристического уравнения действительные отрицательные и разрядка емкостного элемента имеет

апериодический характер; при $\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ корни комплексные и сопряженные и разрядка имеет колебательный характер.

А. Колебательный процесс разрядки. В этом случае корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0, \quad (5.31)$$

где $\delta = r/2L$ — коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{1/(LC - \delta^2)}$ — собственная угловая частота колебательного процесса.

Подставив комплексные значения корней в (5.30), получим зависимость от времени при колебательном процессе напряжения на емкостном элементе и затем по (5.27) разрядного тока:

$$u_C = e^{-\delta t} (A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}); \quad (5.32a)$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -C e^{-\delta t} [-\delta (A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}) + j\omega_0 (A_1 e^{j\omega_0 t} - A_2 e^{-j\omega_0 t})]. \quad (5.32b)$$

Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 обратимся, как и в других задачах, к законам коммутации для индуктивного [см. (5.1)] и емкостного [см. (5.2)] элементов. До коммутации и, в частности в момент времени $t = 0_-$, непосредственно предшествовавший коммутации, напряжение на емкостном элементе равнялось ЭДС E источника, а тока в индуктивном элементе не было. Поэтому

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A_1 + A_2;$$

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = C[\delta(A_1 + A_2) - j\omega_0(A_1 - A_2)],$$

откуда

$$A_1 = E(\delta + j\omega_0)/2j\omega_0; \quad A_2 = E(j\omega_0 - \delta)/2j\omega_0.$$

Подставим эти значения в (5.32a) и учтем, что по формуле Эйлера (2.25)

$$e^{\pm j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j \sin \omega_0 t.$$

В результате получим зависимость изменения напряжения на емкостном элементе от времени в виде

$$u_C = \frac{E}{\omega_0} e^{-\delta t} (\omega_0 \cos \omega_0 t + \delta \sin \omega_0 t). \quad (5.33)$$

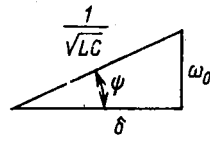


Рис. 5.7

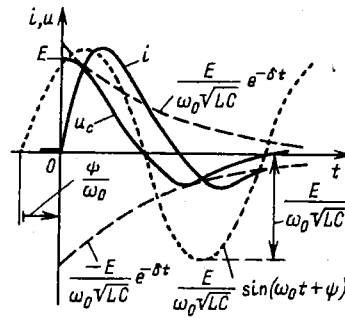


Рис. 5.8

Сумму косинусоидальной и синусоидальной функций можно заменить одной синусоидальной функцией. Для этого положим, что отношение $\omega_0/\delta = \operatorname{tg} \psi$, т. е. будем считать, что ω_0 и δ — катеты прямоугольного треугольника (рис. 5.7), гипотенуза которого

$$\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} = \sqrt{1/(LC) - \delta^2 + \delta^2} = 1/\sqrt{LC}.$$

Разделив и умножив (5.33) на $1/\sqrt{LC}$, получим

$$u_C = \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi), \quad (5.34)$$

и по (5.27) разрядный ток будет

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t. \quad (5.35)$$

Зависимости (5.34) и (5.35) показывают, что напряжение емкостного элемента и разрядный ток можно рассматривать как синусоидально изменяющиеся во времени величины, но с амплитудами, уменьшающимися по экспоненциальному закону при постоянной времени $\tau = 1/\delta = 2L/r$.

Для построения соответствующих зависимостей можно сначала построить вспомогательные экспоненты $\pm \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t}$ для напряжения (рис. 5.8) и $\pm \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t}$ для тока. Кривые изменения напряжения и тока (рис. 5.8) должны вписаться в пределы, ограниченные указанными вспомогательными экспонентами. Для нахождения характерных точек кривой изменения напряжения на емкостном элементе; таких как $u_C(0) = E$ и $u_C(t) = 0$, на рисунке показана точками вспомогательная кривая — синусоида.

Б. Аперидический процесс разрядки. Если $\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, то действительные корни характеристического уравнения (5.29) имеют отрицательные различные значения, причем $p_2 < p_1 < 0$. Для нахождения A_1 и A_2 в общем решении (5.30) воспользуемся аналогично предыдущему законами коммутации для емкостного и индуктивного элементов:

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A_1 + A_2;$$

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = -C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = -C(p_1 A_1 + p_2 A_2),$$

т. е.

$$A_1 = \frac{p_2 E}{p_2 - p_1} > 0, \quad A_2 = \frac{p_1 E}{p_1 - p_2} < 0.$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в (5.30), получим напряжение на емкостном элементе:

$$u_C = \frac{p_2 E}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1 E}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}$$

и ток разрядки:

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -\frac{p_1 p_2 E C}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Кривые изменения напряжения и тока показаны на рис. 5.9, где штриховыми линиями нанесены также вспомогательные экспоненты. В течение всего переходного процесса напряжение и ток остаются положительными, т. е. разрядка емкостного элемента аперидическая.

Для предельного случая аперидического процесса при $r^2/(4L^2) = 1/(LC)$ характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $p_1 = p_2 = p = -r/(2L)$ (кратные корни). При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (5.28) отличается от (5.30) и записывается в виде

$$u_C = (A_1 + A_2 t) e^{pt},$$

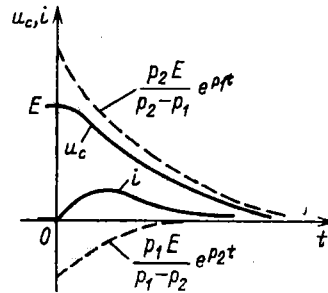


Рис. 5.9

где постоянные A_1 и A_2 определяются на основании законов коммутации. Напряжение на емкостном элементе и ток во время предельного аperiodического процесса разрядки

$$u_C = E \left(1 + \frac{r}{2L} t \right) e^{-\frac{r}{2L} t}; \quad i = \frac{E}{L} t e^{-\frac{r}{2L} t}.$$

5.7. ПОДКЛЮЧЕНИЕ НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ С ИНДУКТИВНЫМ, РЕЗИСТИВНЫМ И ЕМКОСТНЫМ ЭЛЕМЕНТАМИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОЙ ЭДС

В отличие от процесса разрядки емкостного элемента в цепи на рис. 5.6, описываемого однородным дифференциальным уравнением (5.28), процесс зарядки в аналогичной цепи от источника постоянной ЭДС E (рис. 5.10, а) описывается неоднородным дифференциальным уравнением

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Решение этого уравнения представляет собой наложение установившегося и свободного процессов

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв},$$

где составляющая свободного процесса совпадает с (5.30), а составляющая установившегося процесса $u_{Cy} = E$ (зарядка до напряжения, равного ЭДС), т. е. общее решение для напряжения на емкостном элементе, имеет вид

$$u_C = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (5.36a)$$

и зарядный ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = p_1 C A_1 e^{p_1 t} + p_2 C A_2 e^{p_2 t}. \quad (5.36b)$$

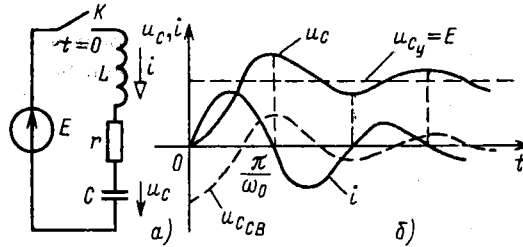


Рис. 5.10

До замыкания ключа напряжения на емкостном элементе и тока в цепи не было. Поэтому в соответствии с законами коммутации получим для момента замыкания ключа ($t = 0$) два уравнения для определения двух постоянных A_1 и A_2 :

$$u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+) = E + A_1 + A_2;$$

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

откуда определяются постоянные:

$$A_1 = p_2 E / (p_1 - p_2), \quad A_2 = p_1 E / (p_2 - p_1).$$

Ограничимся здесь анализом колебательного [см. (5.31)] процесса зарядки. Выполнив преобразования, аналогичные переходу от (5.33) к (5.34), получим зависимости изменения во время напряжения на емкостном элементе и зарядного тока (рис. 5.10, б):

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cв} = E - \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi);$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t.$$

Напряжение на емкостном элементе достигает наибольшего значения в момент времени $t = \pi/\omega_0$. Оно тем больше, чем постоянная времени $\tau = 1/\delta$ больше периода собственных колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$; и в пределе может превышать почти в 2 раза установившееся напряжение. Такое перенапряжение может быть опасно для изоляции высоковольтных установок. Чтобы исключить перенапряжение, нужно осуществить апериодический режим зарядки, например включить последовательно в цепь добавочный резистор.

5.8. ПОДКЛЮЧЕНИЕ НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ С ИНДУКТИВНЫМ И РЕЗИСТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТАМИ К ИСТОЧНИКУ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЭДС

В неразветвленной цепи (рис. 5.11, а) с источником синусоидальной ЭДС $e = u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, при установившемся режиме синусоидальный ток согласно (2.46)

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

где $I_m = U_m / \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$ — амплитуда тока; $\varphi = \arctg(\omega L/r)$ — аргумент комплексного сопротивления цепи; ψ_u — начальная фаза.

Неоднородное дифференциальное уравнение переходного процесса, возникающего после замыкания ключа, подобно уравнению (5.4), т. е. имеет вид

$$u_L + u_r = L di/dt + ri = e.$$

Его общее решение равно сумме свободной [см. (5.7)] и установившейся составляющих тока:

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{r}{L} t}.$$

На основании закона коммутации для индуктивного элемента [см. (5.1)] в момент времени $t=0$ справедливо соотношение

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = I_m \sin(\psi_u - \varphi) + A,$$

откуда определяется постоянная интегрирования:

$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi).$$

Подставив значение постоянной A в общее решение, найдем зависимость тока от времени:

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-t/\tau},$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени цепи.

Таким образом, во время переходного процесса ток в цепи состоит из синусоидальной составляющей и свободной составляющей, убывающей экспоненциально (рис. 5.11, б). Практически через интервал времени 3τ после замыкания ключа свободной составляющей можно пренебречь.

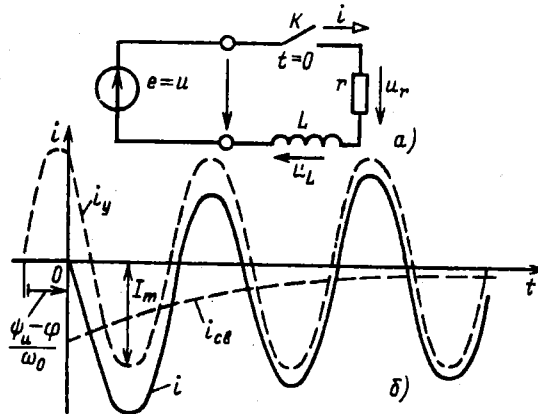


Рис. 5.11

Если момент коммутации ($t = 0$) выбран так, что начальная фаза напряжения источника $\psi_u = \varphi$, то свободная составляющая тока равна нулю, т. е. переходного процесса нет и в цепи сразу устанавливается синусоидальный ток.

Если начальная фаза напряжения источника $\psi_u = \varphi + \pi/2$, то интенсивность переходного процесса будет наибольшая. В момент времени $t \approx T/2 = \pi/\omega$ максимум тока будет наибольшим и в пределе при $t > T$ близким к $2I_m$.

Аналогично рассчитывается переходный процесс при подключении источника синусоидальной ЭДС к цепи с последовательно соединенными резистивным и емкостным элементами и в других случаях. И здесь переходный процесс зависит от начальной фазы напряжения источника: он отсутствует при $\psi_u = \varphi + \pi/2$, где $\varphi = \arctg[-1/(\omega Cr)] < 0$, и выражен наиболее сильно при $\psi_u = \varphi$, когда максимальное напряжение на емкостном элементе может почти в 2 раза превысить амплитуду установившегося напряжения. Такое перенапряжение может привести к пробое изоляции в высоковольтных установках.

5.9. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Операторный метод не обладает физической наглядностью в силу своей глубокой математической формализации, но в ряде случаев упрощает расчеты. Его идея заключается в том, что расчет переходного процесса переносится из области функций действительной переменной (времени t) в область функций комплексного переменного p , в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические. Такое преобразование называется *прямым*. Полученное решение алгебраических уравнений *обратным* преобразованием переносится в область действительного переменного. Строгое обоснование метода дается в курсе математики. Здесь познакомимся лишь с техникой применения операторного метода.

Для прямого преобразования функций времени $f(t)$ применяется преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (5.37)$$

что сокращенно записывается так:

$$F(p) = L[f(t)],$$

где функция времени $f(t)$ — однозначная, называемая *оригиналом*, определенная при $t \geq 0$, интегрируемая в интервале времени $0 - \infty$ и равная нулю при $t < 0$; $F(p)$ — функция комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$ при $\operatorname{Re} p = \sigma > 0$, называемая *лапласовым изображением*.

Примем, что начало переходного процесса в цепи соответствует моменту времени $t = 0$.

В табл. 5.1 приведены примеры изображения простых функций.

Отметим некоторые свойства преобразования Лапласа, называемые также теоремами.

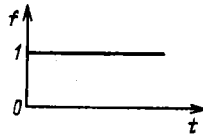
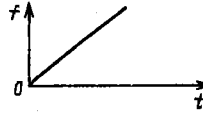
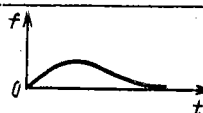
1. Теорема о сложении или линейность преобразования

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)]. \quad (5.38)$$

2. Теорема об интегрировании

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p} F(p). \quad (5.39)$$

Таблица 5.1. Изображения функций по Лапласу

Функция оригинал $f(t)$		Изображение функции $F(p)$
Выражение функции	Вид функции	
$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$ (единичная функция)		$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$		$\frac{1}{p + \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$		$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
t		$\frac{1}{p^2}$
$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$		$\frac{\beta - \alpha}{(p + \alpha)(p + \beta)}$

3. Теорема о дифференцировании

$$L[df(t)/dt] = pF(p) - f(0_+). \quad (5.40)$$

4. Теорема запаздывания

$$L[f(t - T)] = e^{-pT} L[f(t)] = e^{-pT} F(p). \quad (5.41)$$

Преобразование (5.37) позволяет получить соотношения между напряжением $u(t) = u$ и током $i(t) = i$ в операторной форме для резистивного, индуктивного и емкостного элементов.

Изображение напряжения на резистивном элементе $u_r(t) = ri(t)$ по (5.25)

$$U_r(p) = r \int_0^{\infty} e^{-pt} i(t) dt = rI(p). \quad (5.42)$$

Выражение (5.42) называется законом Ома в операторной форме для резистивного элемента (рис. 5.12, а).

Изображение напряжения $u_L = L \frac{di}{dt}$ на индуктивном элементе по (5.38) и (5.40)

$$U_L(p) = -Li(0) + pLI(p), \quad (5.43)$$

где $i(0) = i(0_-) = i(0_+)$ — ток в индуктивном элементе в момент коммутации $t = 0$, учитывающий начальные условия (5.1).

Напряжение на емкостном элементе, начиная с момента времени $t = 0$ возникновения переходного процесса в общем случае,

$$u_C(t) = u_C(0) \cdot 1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt,$$

где $u_C(0) = u_C(0_-) = u_C(0_+)$ — напряжение на емкостном элементе, соответствующее начальному условию (5.2).

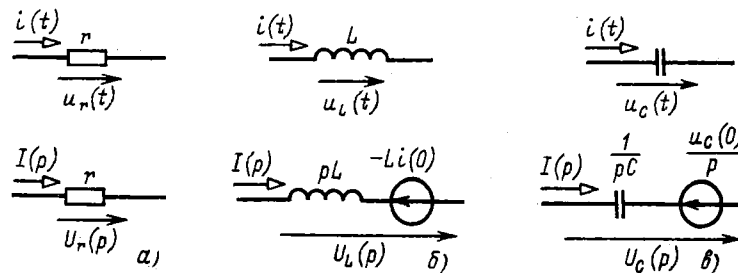


Рис. 5.12

Учитывая изображение единичной функции $L[1(t)] = 1/p$ (табл. 5.1) и соотношения (5.38) и (5.39), найдем изображение напряжения $u_C(t)$:

$$U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{pC} I(p). \quad (5.44)$$

Выражениям (5.43) и (5.44) соответствуют схемы замещения индуктивного и емкостного элементов в операторной форме на рис. 5.12, б и в.

Если начальные условия нулевые, т. е. $i_L(0_-) = 0$ и $u_C(0_-) = 0$, то выражения (5.43) и (5.44) примут вид закона Ома в операторной форме для индуктивного элемента

$$U_L(p) = pLI(p); \quad (5.45a)$$

для емкостного элемента

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p), \quad (5.45b)$$

где pL и $1/(pC)$ — сопротивления индуктивного и емкостного элементов в операторной форме.

Воспользовавшись линейностью преобразования Лапласа (5.38)

для суммы токов в любом узле цепи $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$, получим первый закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0, \quad (5.46)$$

где $I_k(p) = L[i_k(t)]$ (рис. 5.13, а, б).

Аналогично и второму закону Кирхгофа для любого контура по (2.29)

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = 0,$$

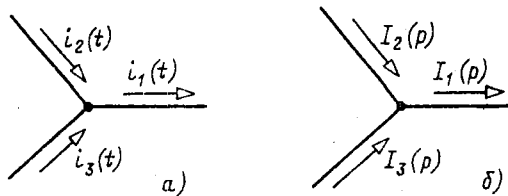


Рис. 5.13

или в другой форме по (2.49)

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n e_k(t)$$

соответствует его представление в операторной форме

$$\sum_{k=1}^m U_k(p) = 0, \quad (5.47a)$$

или

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = \sum_{k=1}^m E_k(p), \quad (5.47b)$$

где $U_k(p) = L[u_k(t)]$ и $E_k(p) = L[e_k(t)]$.

При расчете переходного процесса операторным методом полезно выделить несколько логически самостоятельных этапов:

1) представить исходные данные о параметрах всех элементов схемы цепи в операторной форме. Это означает, что, во-первых, ЭДС источников напряжения и токи источников тока, заданные мгновенными значениями $e(t)$ и $J(t)$, следует представить по (5.37) соответствующими изображениями $E(p)$ и $J(p)$ и, во-вторых, пассивные элементы — схемами замещения по рис. 5.12;

2) для полученной схемы замещения в операторной форме составить и решить полную систему независимых уравнений по первому [см. (5.46)] и второму [см. (5.47)] законам Кирхгофа в операторной форме, т. е. найти изображение $F(p)$ искомой величины, например ток $I(p)$;

3) наиболее часто изображение имеет вид рациональной дроби $F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, для которой обратным преобразованием нужно найти оригинал $f(t)$, например ток $i(t)$. Для этого можно воспользоваться теоремой разложения

$$f(t) = \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (5.48)$$

где $N(p)$ и $M(p)$ — многочлены в числителе и знаменателе изображения $F(p)$; $M'(p)$ — производная многочлена $M(p)$ по p ; p_k — корни многочлена $M(p) = 0$, где предполагается, что корни простые. Если получаются кратные корни, то теорема разложения записывается в другой форме.

В качестве примера рассчитаем ток в цепи, содержащий $B = 3$ ветви и $Y = 2$ узла (рис. 5.14, а) при ЭДС $e(t) = Ee^{-at}$ (рис. 5.14, б) и нулевых начальных условиях, т. е. при $i_L(0_-) = 0$, операторным методом.

Для этого выполним последовательно все этапы расчета:

- 1) по правилам, показанным на рис. 5.12, составим схему замещения в операторной форме (рис. 5.14, в), где $E(p) = E/(p + a)$ — изображение функции ЭДС $e(t)$, найденное по (5.37) или выписанное из табл. 5.1;
- 2) при выбранных положительных направлениях токов составим одно ($Y - 1 = 2 - 1 = 1$) уравнение по первому закону Кирхгофа для узла a :

$$-I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0 \quad (5.49a)$$

и два ($K = B - Y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$) уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров 1 и 2:

$$U_1(p) + U_L(p) = E(p);$$

$$U_2(p) - U_L(p) = 0$$

или

$$r_1 I_1(p) + p L I_L(p) = E(p); \quad (5.49б)$$

$$r_2 I_2(p) - p L I_L(p) = 0, \quad (5.49в)$$

где учтены законы Ома для пассивных элементов (2.42) и (2.45а).

Решив систему трех алгебраических уравнений (5.49), определим ток в операторной форме:

$$I_L(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{\frac{r_2 E}{L(r_1 + r_2)}}{(p + a) \left(p + \frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} \right)}$$

Многочлен $M(p) = 0$ имеет два корня: $p_1 = -a$ и $p_2 = -r_1 r_2 / [L(r_1 + r_2)] = -\beta$, а $M'(p) = 2p + a + \beta$. По теореме разложения (5.48) опре-

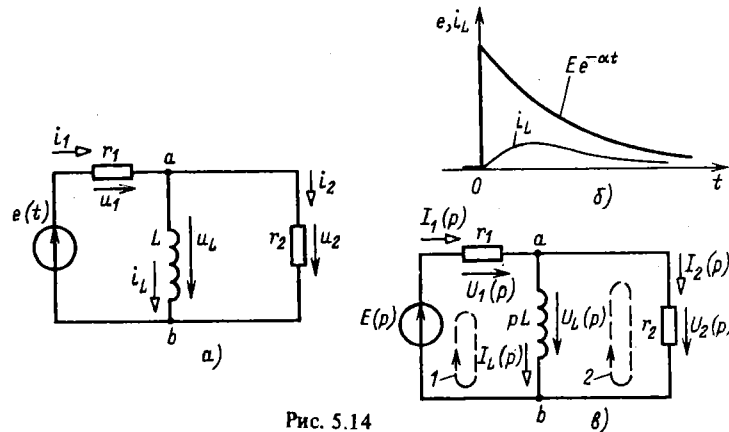


Рис. 5.14

$$i(t) = \frac{Er_2}{r_1 r_2 - \alpha L (r_1 + r_2)} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}];$$

Во многих практических случаях расчетов пользоваться прямым [см. (5.37)] и обратным [см. (5.48)] преобразованиями нет необходимости, так как имеются обширные справочные материалы соответствия оригиналов и их изображений, подобные приведенным в табл. 5.1.

Токи i_L в индуктивных и напряжения u_C на емкостных элементах определяют энергию этих элементов [см. (2.5) и (2.13)], инерционность изменения которой при различного рода коммутациях вызывает переходный процесс в цепи. Совокупность токов i_L и напряжений u_C называется *переменными состояниями цепи*.

В последнем случае система уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции (2.3) и соотношения между током и напряжением для емкостных элементов (2.11), описывающая переходный процесс в цепи, преобразуется в систему уравнений, разрешенную относительно первых производных токов i_L и напряжений u_C :

$$\left. \begin{aligned} di_{L_1}/dt &= f_1(i_{L_1}, \dots, i_{L_m}, u_{C_1}, \dots, u_{C_n}, t); \\ &\dots\dots\dots \\ di_{L_m}/dt &= f_m(i_{L_1}, \dots, i_{L_m}, u_{C_1}, \dots, u_{C_n}, t); \\ du_{C_1}/dt &= f_{m+1}(i_{L_1}, \dots, i_{L_m}, u_{C_1}, \dots, u_{C_n}, t); \\ &\dots\dots\dots \\ du_{C_m}/dt &= f_{m+n}(i_{L_1}, \dots, i_{L_m}, u_{C_1}, \dots, u_{C_n}, t), \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

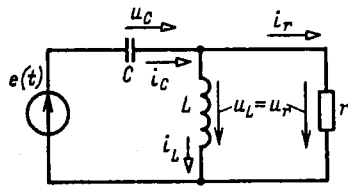


Рис. 5.15

где m и n — число индуктивных и емкостных элементов с начальными значениями токов $i_{L1}(0), \dots, i_{Lm}(0)$ и напряжений $u_{C1}(0), \dots, u_{Cn}(0)$.

Система уравнений (5.37) называется системой уравнений в *нормальной форме*. Для ее решения разработан ряд эффективных численных методов: метод Эйлера, метод Рунге–Кутты и др., входящих в современное стандартное математическое обеспечение ЭВМ.

Например, система уравнений, описывающая переходный процесс в цепи на рис. 5.15 и составленная на основе законов Кирхгофа

$$-i_C + i_L + i_r = 0;$$

$$u_C + u_L = e(t);$$

$$u_C - u_r = 0$$

или с учетом (2.3) и (2.11)

$$-C \frac{du_C}{dt} + i_L + i_r = 0;$$

$$u_C + L \frac{di_L}{dt} = e(t);$$

$$ri_r - L \frac{di_L}{dt} = 0,$$

после исключения тока i_r преобразуется в систему уравнений в *нормальной форме* относительно переменных состояния i_L и u_C

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{(e(t) - u_C)}{L} = f_1(u_C, t);$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i_L}{C} + \frac{(e(t) - u_C)}{rC} = f_2(i_L, u_C, t),$$

где $e(t)$ — ЭДС, возбуждающая переходный процесс в цепи при заданных начальных условиях $u_C(0)$ и $i_L(0)$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В общем случае схемы замещения электротехнических устройств содержат кроме линейных также нелинейные резистивные, индуктивные и емкостные элементы, соответственно описываемые нелинейными вольт-амперными $I(U)$ (см. рис. 1.6) или $i(u)$, вебер-амперными $\Psi(i_L)$ (рис. 2.2) и кулон-вольтными $q(u_C)$ (см. рис. 2.4) характеристиками.

Нелинейные свойства элементов могут быть источником нежелательных явлений, например искажения формы тока в цепи, что недопустимо для правильного воспроизведения сигналов. Однако в ряде случаев нелинейные свойства элементов лежат в основе принципа действия электротехнических устройств, например выпрямителей и стабилизаторов напряжения, усилителей и т. д. Для реализации таких устройств создаются элементы с необходимыми нелинейными характеристиками на основе диэлектрических, полупроводниковых, ферромагнитных и других материалов.

Для нелинейных цепей неприменим принцип наложения. Поэтому неприменимы или применимы с ограничениями все методы расчета цепей, которые на нем основаны: метод контурных токов, метод наложения, метод эквивалентного источника.

Ограничимся далее анализом цепей, содержащих пассивные нелинейные резистивные двух-, трех- и четырехполюсники.

6.2. ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

Свойства нелинейного резистивного двухполюсника определяются вольт-амперной характеристикой (ВАХ), а его схема замещения представляется нелинейным резистивным элементом (рис. 6.1). Если ВАХ для изменяющегося во времени тока $i(u)$ и постоянного тока $I(U)$ совпадают, то двухполюсник называется *безынерционным*, в противном случае — *инерционным*. Последние здесь не будут рассматриваться.

Каждая точка ВАХ определяет статистическое $r_{ст} = U/I$ и дифференциальное $r_{диф} = dU/dI$ сопротивления нелинейного двухполюсника (рис. 6.1).

В некоторых двухполюсниках, например в лампах накаливания, нелинейность ВАХ обусловлена нагревом, причем в силу инерционности тепловых процессов для мгновенных значений синусоидального тока и напряжения справедливо соотношение $u = r_{ст}(I) i$, где статическое сопротивление $r_{ст}(I) = U/I$ равно отношению действующих значений

напряжения и тока. Такие двухполюсники называются *неискажающими* или *условно-нелинейными*.

А. Цепь постоянного тока. Рассмотрим общий случай включения нелинейного резистивного двухполюсника в произвольную линейную цепь, которую относительно выводов этого двухполюсника представим линейным активным двухполюсником (рис. 6.2). Заменяем активный двухполюсник эквивалентным источником с внешней характеристикой (см. § 1.14):

$$U = E_{\text{эк}} - r_{\text{эк}} I, \quad (6.1)$$

или

$$I = (E_{\text{эк}} - U) / r_{\text{эк}}.$$

Точка пересечения *A* внешней характеристики активного двухполюсника и ВАХ нелинейного двухполюсника $I(U)$ определяет рабочий режим цепи (рис. 6.3). Характеристика (6.1) называется *нагрузочной характеристикой* активного двухполюсника, а графоаналитический метод расчета нелинейной цепи с ее применением — *методом нагрузочной характеристики*.

Метод нагрузочной характеристики пригоден и в случаях, если нелинейная часть цепи содержит последовательное или параллельное соединение нелинейных двухполюсников с известными ВАХ. Для этого необходимо в первом случае сложить ВАХ нелинейных двухполюсников по напряжению (рис. 6.4), а во втором — по току (рис. 6.5). Определив рабочую точку на результирующей ВАХ методом нагрузочной характе-

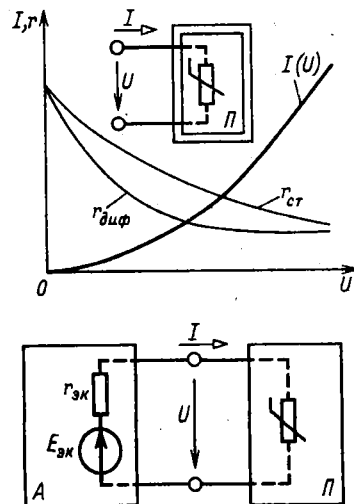


Рис. 6.2

Рис. 6.1

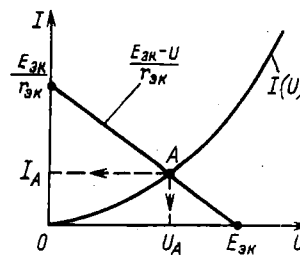


Рис. 6.3

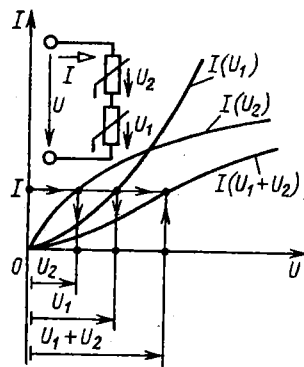


Рис. 6.4

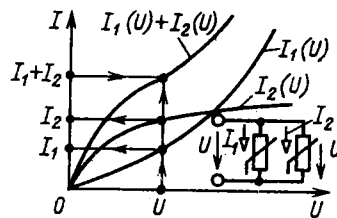


Рис. 6.5

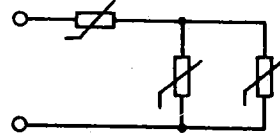


Рис. 6.6

ристики, далее найдем ток и напряжение каждого нелинейного двухполюсника.

Аналогично рассчитывается цепь, которая содержит смешанное соединение нелинейных двухполюсников (рис. 6.6).

Б. Цепь переменного тока. Если линейная часть цепи с источниками синусоидальных ЭДС и токов не содержит реактивных элементов, то соответствующий ее двухполюсник представляется эквивалентным источником (рис. 6.7), где

$$e_{\text{эк}} = E_{\text{мэк}} \sin(\omega t + \psi_e)$$

— эквивалентный источник ЭДС.

Расчет режима работы такой цепи выполняется методом нагрузочной характеристики (рис. 6.8).

Для любого момента времени t (например, t_1, t_2) уравнению нагрузочной характеристики

$$i = \frac{e_{\text{эк}}(t) - u}{r_{\text{эк}}}$$

соответствует прямая линия, проходящая через точки $e_{\text{эк}}(t)$ на оси абсцисс и $e_{\text{эк}}(t)/r_{\text{эк}}$ на оси ординат. Режим цепи определяется точкой пересечения соответствующей нагрузочной характеристики и ВАХ нелинейного двухполюсника $i(u)$. Зная напряжение u и ток i в рассматриваемые моменты времени, можно построить зависимости $u(t)$ и $i(t)$.

В частном случае нелинейного резистивного двухполюсника с известной условно-нелинейной ВАХ $I(U)$ (рис. 6.9) применим графоаналитический метод в сочетании с комплексным методом. При этом цепь ли-

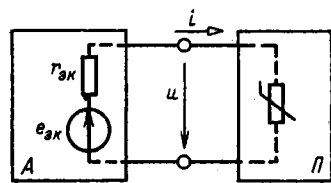


Рис. 6.7

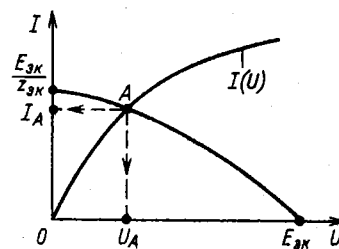


Рис. 6.9

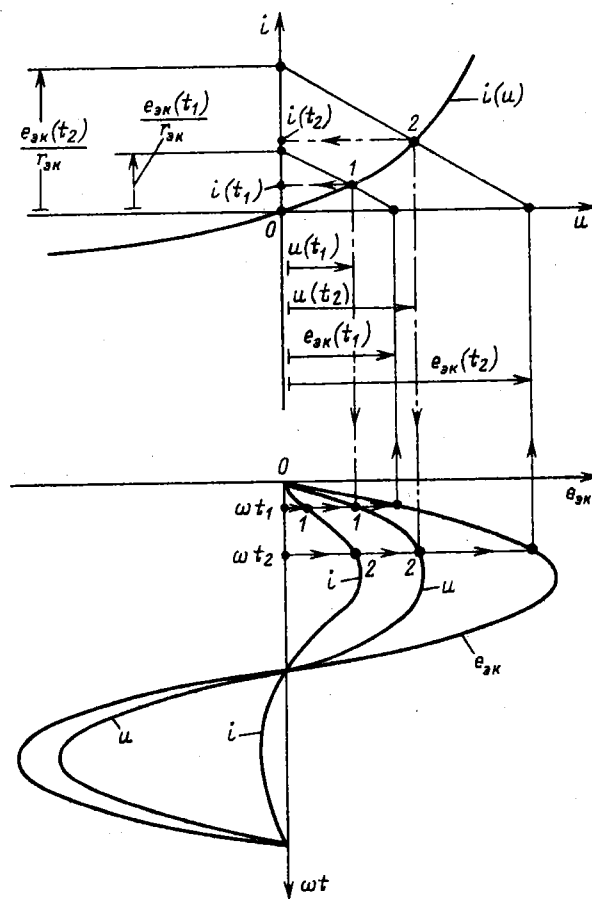


Рис. 6.8

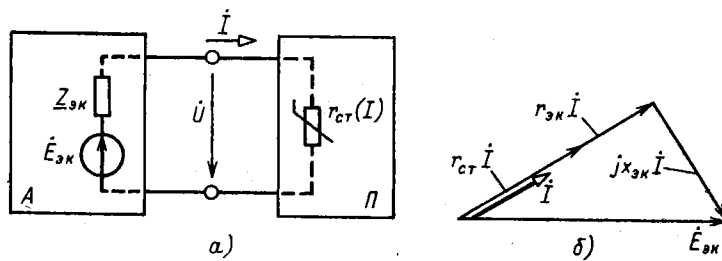


Рис. 6.10

нейного активного двухполюсника может быть произвольной. Этой цепи соответствует эквивалентный источник с ЭДС $E_{эк} = E \angle \psi_e = U_x = U_x \angle \psi_u$ и выходным сопротивлением $Z_{эк} = z_{эк} \angle \varphi_{эк} = r_{эк} + jx_{эк}$ (рис. 6.10, а).

Внешняя характеристика эквивалентного источника определяется векторной диаграммой (рис. 6.10, б), где приняты $\varphi_{эк} < 0$ и $\psi_e = 0$:

$$U = \sqrt{E_{эк}^2 - (x_{эк} I)^2} - r_{эк} I.$$

Точка пересечения А внешней характеристики активного двухполюсника $U(I)$ и ВАХ нелинейного двухполюсника определяет рабочий режим цепи: ток I_A и напряжение U_A .

6.3. ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

Подобно нелинейным двухполюсникам различают безынерционные, инерционные и условно-нелинейные трех- и четырехполюсники. Ограничимся здесь расчетом безынерционных нелинейных резистивных трехполюсников (транзисторов, электронных ламп) в режимах, характерных для их работы в усилителях. Расчеты работы нелинейных четырехполюсников в аналогичных режимах подобны.

А. Цепь постоянного тока. Типовое включение нелинейных трехполюсников в цепь постоянного тока показано на рис. 6.11, а. При этом входная цепь трехполюсника определяется семейством ВАХ

$$I_1(U_1) \text{ или } U_1(I_1) \quad (6.2)$$

при заданных либо напряжении U_2 (рис. 6.11, б), либо токе I_2 и выходная цепь — семейством ВАХ

$$I_2(U_2) \text{ или } U_2(I_2) \quad (6.3)$$

при заданных либо токе I_1 (рис. 6.11, в), либо напряжении U_1 . По нагрузочным характеристикам входной

$$I_1 = (E_1 - U_1)/r_1$$

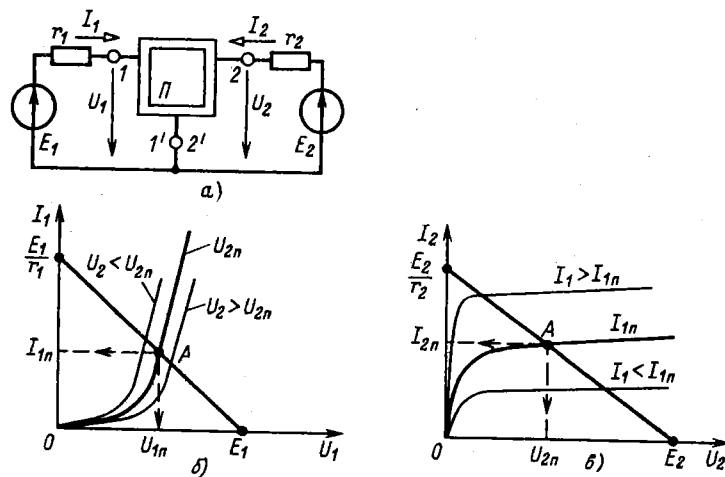


Рис. 6.11

и выходной

$$I_2 = (E_2 - U_2)/r_2$$

цепей трехполюсника и семейству его ВАХ методом нагрузочной характеристики определяется режим работы трехполюсника. Например, для семейства ВАХ на рис. 6.11, б и в рабочий режим трехполюсника определяет точка А. Режим в цепи постоянного тока называется *режимом покоя*.

Б. Расчет режима для переменных составляющих напряжений и токов. Во многих цепях с трехполюсниками кроме источников постоянных ЭДС, определяющих режим покоя, действует источник переменной ЭДС, как показано на рис. 6.12, где e — переменная ЭДС с малой амплитудой. При этом на входе и выходе трехполюсника токи и напряжения будут иметь и постоянные I_n , U_n и переменные i , u составляющие. Положение рабочей точки А на ВАХ трехполюсника, определяющей постоянные составляющие тока и напряжения, в общем случае зависит

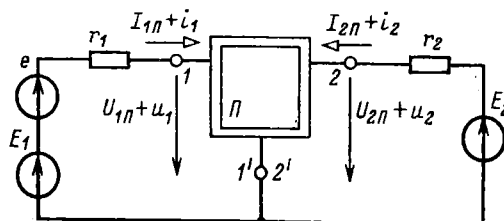


Рис. 6.12

от значений как постоянных ЭДС E_1 и E_2 , так и переменной ЭДС e . В большинстве практических случаев, например в цепях с транзисторами (см. гл. 10), положение рабочей точки можно считать соответствующим режиму покоя, т. е. определять при $e = 0$, как на рис. 6.11.

Для расчета малых переменных составляющих тока и напряжения пользуются линейными схемами замещения нелинейного трехполюсника, причем схема замещения и параметры ее элементов зависят от выбранного описания ВАХ трехполюсника [см. (6.2) и (6.3)], представляющих собой функции двух независимых переменных.

Разложив функции двух переменных в области рабочей точки A в ряд Тейлора при малых приращениях независимых переменных и ограничившись линейными членами, можно определить приращения самих функций. Обычно используют сочетания ВАХ $U_1(I_1)$ при заданном напряжении U_2 и $I_2(U_2)$ при заданном токе I_1 или $I_1(U_1)$ при заданном напряжении U_2 и $I_2(U_2)$ при заданном напряжении U_1 по (6.2) и (6.3), удобные соответственно для анализа биполярных и полевых транзисторов.

В первом случае получим

$$u_1 = \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_1} \right|_{U_2 = \text{const}} i_1 + \left. \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \right|_{I_1 = \text{const}} u_2; \quad (6.4a)$$

$$i_2 = \left. \frac{\partial I_2}{\partial I_1} \right|_{U_2 = \text{const}} i_1 + \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right|_{I_1 = \text{const}} u_2 \quad (6.4b)$$

или

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2; \quad (6.5a)$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2, \quad (6.5b)$$

где

$$h_{11} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_1} \right|_{U_2 = \text{const}}; \quad h_{12} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \right|_{I_1 = \text{const}};$$

$$h_{21} = \left. \frac{\partial I_2}{\partial I_1} \right|_{U_2 = \text{const}}; \quad h_{22} = \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right|_{I_1 = \text{const}},$$

т. е. в матричной форме

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \mathbf{h} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

во втором случае —

$$i_1 = \left. \frac{\partial I_1}{\partial U_2} \right|_{U_1 = \text{const}} u_1 + \left. \frac{\partial I_1}{\partial U_1} \right|_{U_2 = \text{const}} u_2; \quad (6.6a)$$

$$i_2 = \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right|_{U_1 = \text{const}} u_1 + \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_1} \right|_{U_2 = \text{const}} u_2 \quad (6.6b)$$

или

$$i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2; \quad (6.7a)$$

$$i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2, \quad (6.7b)$$

где

$$y_{11} = \left. \frac{\partial I_1}{\partial U_2} \right|_{U_1 = \text{const}}; \quad y_{12} = \left. \frac{\partial I_1}{\partial U_1} \right|_{U_2 = \text{const}};$$

$$y_{21} = \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right|_{U_1 = \text{const}}; \quad y_{22} = \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_1} \right|_{U_2 = \text{const}},$$

т. е. в матричной форме

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Параметры h_{ik} и y_{ik} нелинейного трехполюсника рассчитываются по соответствующим ВАХ.

Уравнению (6.5a) соответствует схема замещения входной цепи трехполюсника из двух элементов, соединенных последовательно: первому слагаемому — резистивный элемент с сопротивлением h_{11} , второму — источник ЭДС, управляемый напряжением u_2 (рис. 6.13). Управляемый источник ЭДС отражает зависимость электрического состояния входной цепи трехполюсника от режима работы его выходной цепи.

Аналогично уравнение (6.5b) определяет схему замещения выходной цепи трехполюсника в виде параллельного соединения резистивного элемента с сопротивлением $1/h_{22}$ и источника тока, управляемого током входной цепи i_1 .

Рассуждения, подобные предыдущим, определяют схемы замещения входной и выходной цепей трехполюсника по уравнениям (6.7a) и (6.7b) соответственно (рис. 6.14).

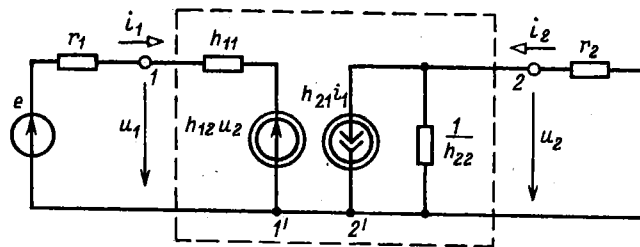


Рис. 6.13

Заметим, что систему уравнений (6.5) можно получить из системы уравнений (6.7), решив последнюю относительно напряжения u_1 и тока i_2 . Это означает эквивалентность схем замещения трехполюсника по рис. 6.13 и 6.14 при

$$h_{11} = 1/y_{11}; \quad h_{12} = -y_{12}/y_{11}; \quad h_{21} = y_{21}/y_{11}; \\ h_{22} = y_{22} - y_{12}y_{21}/y_{11}.$$

Таким образом, работу нелинейного трехполюсника в цепи на рис. 6.12 можно рассматривать как наложение режима покоя в цепи на рис. 6.11, а и режима переменного тока в цепи на рис. 6.13 или 6.14. Режим переменного тока при малой амплитуде ЭДС e называется *режимом малого сигнала*.

Подобно нелинейному трехполюснику свойства нелинейного четырехполюсника (рис. 6.15) определяются ВАХ его входной [см. (6.2)]

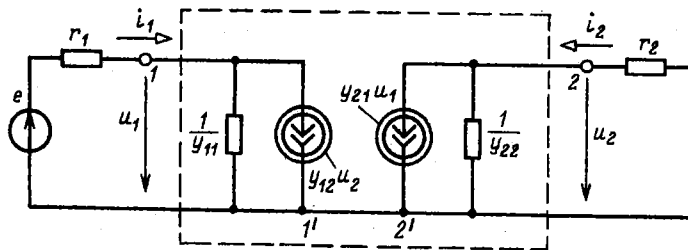


Рис. 6.14

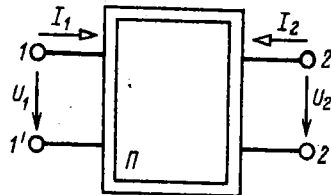


Рис. 6.15

и выходной [см. (6.3)] цепей. Поэтому методика расчета его режимов работы при постоянном и переменном токах аналогична расчетам одноименных режимов для нелинейного трехполюсника.

Являясь частным случаем нелинейного четырехполюсника, нелинейный трехполюсник имеет, однако, принципиальное отличие. Для нелинейного трехполюсника параметры элементов его схем замещения в режиме малого сигнала при выбранной рабочей точке не зависят (см. рис. 2.55), а для нелинейного четырехполюсника в общем случае зависят от схемы включения.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННОЙ МАГНИТОДВИЖУЩЕЙ СИЛОЙ

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

Магнитной цепью (магнитопроводом) называется совокупность различных ферромагнитных и неферромагнитных частей электротехнических устройств для создания магнитных полей нужных конфигурации и интенсивности. В зависимости от принципа действия электротехнического устройства магнитное поле может возбуждаться либо постоянным магнитом, либо катушкой с током, расположенной в той или иной части магнитной цепи.

К простейшим магнитным цепям относится тороид из однородного ферромагнитного материала (рис. 7.1). Такие магнитопроводы применяются в многообмоточных трансформаторах, магнитных усилителях, в элементах ЭВМ и других электротехнических устройствах.

На рис. 7.2 показана более сложная магнитная цепь электромеханического устройства, подвижная часть которого втягивается в электромагнит при постоянном (или переменном) токе в катушке. Сила притяжения зависит от положения подвижной части магнитопровода.

На рис. 7.3 изображена магнитная цепь, в которой магнитное поле возбуждается постоянным магнитом. Если подвижная катушка, расположенная на ферромагнитном цилиндре, включена в цепь постоянного тока, то на нее действует вращающий момент. Поворот катушки с током практически не влияет на магнитное поле магнитной цепи. Такая магнитная цепь есть, например, в измерительных приборах магнитоэлектрической системы.

Рассмотренные магнитные цепи, как и другие возможные конструкции, можно разделить на *неразветвленные магнитные цепи* (рис. 7.1 и 7.3), в которых магнитный поток в любом сечении цепи одинаков, и *разветвленные магнитные цепи* (рис. 7.2), в которых магнитные потоки в различных сечениях цепи различны. В общем случае развет-

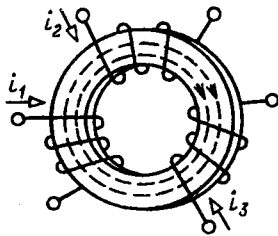


Рис. 7.1

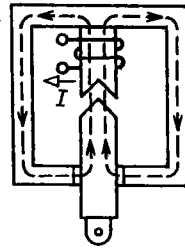


Рис. 7.2

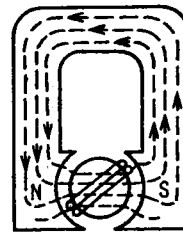


Рис. 7.3

вленные магнитные цепи могут быть сложной конфигурации, например в электрических двигателях, генераторах и других устройствах.

В большинстве случаев магнитную цепь следует считать нелинейной, и лишь при определенных допущениях и определенных режимах работы магнитную цепь можно считать линейной.

7.2. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА ДЛЯ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

Закон полного тока получен на основании многочисленных опытов. Этот закон устанавливает, что *интеграл от напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру* (циркуляция вектора напряженности) *равен алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром*:

$$\oint_l H dl = \Sigma I, \quad (7.1)$$

причем положительными следует считать те токи, направление которых соответствует обходу контура по направлению движения часовой стрелки (правило буравчика). В частности, для контура на рис. 7.4 по закону полного тока

$$\oint_l H dl = I_1 + I_2 - I_3 + I_4.$$

Величина ΣI в (7.1) называется *магнитодвижущей силой* (МДС).

Основной единицей МДС в системе СИ является ампер (А). Основная единица напряженности магнитного поля в системе СИ — *ампер на метр* (А/м) — особого наименования не имеет. Часто применяется так-

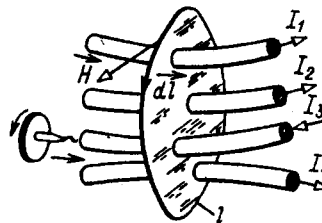


Рис. 7.4

же единица, кратная основной единице напряженности магнитного поля, — ампер на сантиметр, $1 \text{ А/см} = 100 \text{ А/м}$.

Магнитную цепь большинства электротехнических устройств можно представить состоящей из совокупности участков, в пределах каждого из которых можно считать магнитное поле однородным, т. е. с постоянной напряженностью, равной напряженности магнитного поля H_k вдоль средней линии участка длиной l_k . Для таких магнитных цепей можно заменить интегрирование в (7.1) суммированием.

Если при этом магнитное поле возбуждается катушкой с током I , у которой w витков, то для контура магнитной цепи, сцепленного с витками и состоящего из n участков, вместо (7.1) можно записать

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = Iw. \quad (7.2a)$$

Если контур сцеплен с витками m катушек с токами, то

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = \sum_{p=1}^m I_p w_p = \sum_{p=1}^m F_p, \quad (7.26)$$

где $F_p = I_p w_p$ — МДС.

Таким образом, согласно закону полного тока МДС F равна сумме произведений напряженностей магнитного поля на длины соответствующих участков для контура магнитной цепи. Произведение $H_k l_k = U_{mk}$ часто называют *магнитным напряжением* участка магнитной цепи.

7.3. СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Магнитное состояние любой точки изотропной среды, т. е. среды с одинаковыми свойствами во всех направлениях, вполне определяется *вектором напряженности магнитного поля H и вектором магнитной индукции B* , которые совпадают друг с другом по направлению.

Основная единица магнитной индукции в системе СИ называется *тесла* (Тл): $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб/м}^2 = 1 \text{ В} \cdot \text{с/м}^2$. Это индукция такого однородного магнитного поля, в котором магнитный поток Φ (см. § 2.3) через поверхность площадью 1 м^2 , перпендикулярную направлению магнитных линий поля, равен одному *веберу* (Вб).

В вакууме индукция и напряженность магнитного поля связаны простым соотношением: $B = \mu_0 H$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — *магнитная постоянная*. Для ферромагнитных материалов зависимость индукции от напряженности магнитного поля $B(H)$ в общем случае нелинейная.

Для того чтобы экспериментально исследовать магнитные свойства ферромагнитного материала, необходимо все измерения производить на образце, в котором магнитное поле однородное. Таким образом

может быть тороид, изготовленный из исследуемого ферромагнитного материала (рис. 7.5), длина магнитных линий в котором много больше его поперечных размеров (тонкостенный тороид). На тороиде находится равномерно навитая обмотка с числом витков w .

Можно считать, что в тороиде из ферромагнитного изотропного материала с плотно намотанными витками все магнитные линии — окружности, а векторы напряженности и индукции магнитного поля направлены по касательной к соответствующей окружности. Так, на рис. 7.5 показаны средняя магнитная линия и векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в одной из ее точек.

При расчете напряженности и индукции магнитного поля в тонкостенном тороиде можно считать, что все магнитные линии имеют одинаковую длину, равную длине средней линии $2\pi r$.

Предположим, что ферромагнитный материал тонкостенного тороида полностью размагничен и тока I в обмотке нет ($B = 0$ и $H = 0$). Если теперь плавно увеличивать постоянный ток I в обмотке катушки, то в ферромагнитном материале возникнет магнитное поле, напряженность которого определяется законом полного тока (7.1):

$$H = Iw/2\pi r. \quad (7.3)$$

Каждому значению напряженности H магнитного поля в тонкостенном тороиде соответствует определенная намагниченность ферромагнитного материала, а следовательно, и соответствующее значение магнитной индукции B .

Если начальное магнитное состояние материала тонкостенного тороида характеризуется значениями $H = 0$, $B = 0$, то при плавном нарастании тока получим нелинейную зависимость $B(H)$, которая называется *кривой первоначального намагничивания* (рис. 7.5, штриховая линия). Начиная с некоторых значений напряженности H магнитного поля индукция B в тонкостенном ферромагнитном тороиде практически перестает увеличиваться и остается равной B_{max} . Эта область зависимости $B(H)$ называется *областью технического насыщения*.

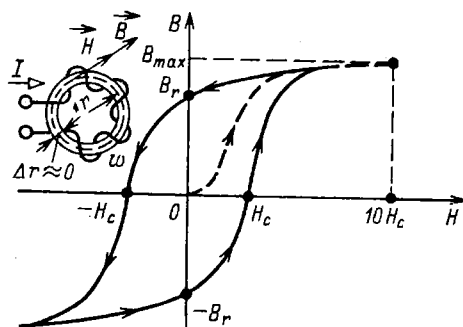


Рис. 7.5

Если, достигнув насыщения, начать плавно уменьшать постоянный ток в обмотке, т. е. уменьшать напряженность поля (7.3), то индукция также начнет уменьшаться. Однако зависимость $B(H)$ уже не совпадает с кривой первоначального намагничивания. Изменив направление тока в обмотке и увеличив его значение, получим новый участок зависимости $B(H)$. При значительных отрицательных значениях напряженности магнитного поля снова наступит техническое насыщение ферромагнитного материала. Если теперь продолжить эксперимент: сначала уменьшать ток обратного направления, затем увеличивать ток прямого направления до насыщения и т. д., то после нескольких циклов перемагничивания для зависимости $B(H)$ будет получена симметричная кривая (рис. 7.5, сплошная линия). Этот замкнутый цикл $B(H)$ называется *предельной статической петлей гистерезиса* (или предельным статическим циклом гистерезиса) ферромагнитного материала. Если во время симметричного перемагничивания область технического насыщения не достигается, то симметричная кривая $B(H)$ называется *симметричной частной петлей гистерезиса* ферромагнитного материала.

Предельный статический цикл гистерезиса ферромагнитных материалов характеризуется следующими параметрами (рис. 7.5): H_c — коэрцитивной силой, B_r — остаточной индукцией и $k_{\square} = B_r / (B_H - 10H_c)$ — коэффициентом прямоугольности.

По значению параметра H_c предельного статического цикла гистерезиса ферромагнитные материалы делятся на группы:

- 1) магнитные материалы с малыми значениями коэрцитивной силы ($H_c < 0,05 \div 0,01$ А/м) называются *магнитно-мягкими*;
- 2) магнитные материалы с большими значениями коэрцитивной силы ($H_c > 20 \div 30$ кА/м) называются *магнитно-твердыми*.

Магнитно-твердые материалы используются для изготовления постоянных магнитов, а магнитно-мягкие — для изготовления магнитопроводов электротехнических устройств, работающих в режиме перемагничивания по предельному или частым циклам.

Магнитно-мягкие материалы в свою очередь делятся на три типа: магнитные материалы с прямоугольной предельной статической петлей гистерезиса, у которых коэффициент прямоугольности $k_{\square} > 0,95$ (рис. 7.6, а); магнитные материалы с округлой предельной статической петлей гистерезиса, у которых коэффициент прямоугольности $0,4 < k_{\square} < 0,7$ (рис. 7.6, б); магнитные материалы с линейными свойствами, у которых зависимость $B(H)$ практически линейная: $B = \mu_r \mu_0 H$ (рис. 7.6, в), где μ_r — относительная магнитная проницаемость.

Все типы магнитных характеристик ферромагнитных материалов могут быть получены на образцах, изготовленных либо из различных ферромагнитных сплавов, либо из ферромагнитной керамики (ферри-

ты). Ценное свойство ферритов в отличие от ферромагнитных сплавов — их высокое удельное электрическое сопротивление.

Магнитопроводы из ферромагнитных материалов с прямоугольным предельным статическим циклом гистерезиса применяются в оперативной памяти цифровых ЭВМ, магнитных усилителях и других устройствах автоматики. Ферромагнитные материалы с округлым предельным статическим циклом гистерезиса используются при изготовлении магнитопроводов электрических машин и аппаратов. Магнитопроводы этих устройств обычно работают в режиме перемагничивания по симметричным частным циклам. При основных расчетах магнитопроводов таких электротехнических устройств симметричные частные циклы заменяют *основной кривой намагничивания* ферромагнитного материала, которая представляет собой геометрическое место вершин симметричных частных циклов тонкостенного ферромагнитного тороида (рис. 7.7), полученных при синусоидальном токе низкой частоты в обмотке.

По основной кривой намагничивания ферромагнитного материала определяют зависимость *абсолютной магнитной проницаемости*

$$\mu_a = \mu_r \mu_0 = B/H \quad (7.4)$$

от напряженности H магнитного поля, которая показана на рис. 7.7 штриховой линией.

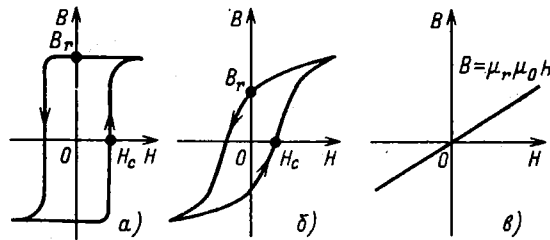


Рис. 7.6

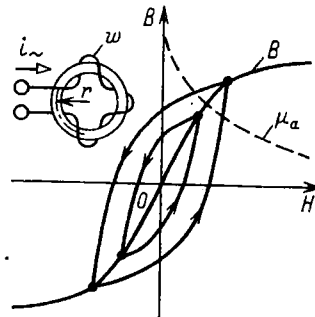


Рис. 7.7

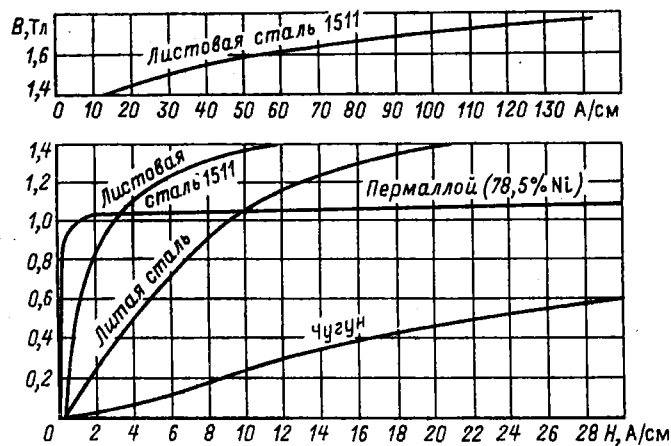


Рис. 7.8

На рис. 7.8 приведены основные кривые намагничивания некоторых электротехнических сталей, используемых в электрических машинах, трансформаторах и других устройствах, а также чугуна и пермаллоя.

Из ферромагнитных материалов с линейными свойствами изготовляют участки магнитопроводов для катушек индуктивности колебательных контуров с высокой добротностью. Такие контуры применяются в различных радиотехнических устройствах (приемниках, передатчиках), в малогабаритных антеннах средств связи и т. д.

Если на участке магнитопровода с площадью поперечного сечения S магнитное поле неоднородное, то часто расчет можно вести, пользуясь средним значением индукции $B_{\text{ср}} = \Phi/S$ и напряженностью $H_{\text{ср}}$ на средней магнитной линии. Например, для тороида с прямоугольной формой поперечного сечения, внутренним радиусом r_1 , внешним радиусом r_2 и высотой h , изготовленного из магнитного материала с линейными свойствами $B = \mu_r \mu_0 H$ при $\mu_r = \text{const}$ (рис. 7.6, в),

$$H_{\text{ср}} = \frac{wI}{2\pi r_{\text{ср}}} = \frac{wI}{\pi(r_1 + r_2)},$$

$$B_{\text{ср}} = \frac{\Phi}{S} = \frac{\mu_r \mu_0}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{wI}{2\pi r} dr = \frac{\mu_r \mu_0 wI}{(r_2 - r_1) \cdot 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$\text{где } \Phi = h \int_{r_1}^{r_2} B dr = \mu_r \mu_0 h \int_{r_1}^{r_2} H dr \text{ и } H \text{ — по (7.3); } S = h(r_2 - r_1).$$

Из полученных выражений следует, что

$$B_{\text{ср}} = \frac{\mu_r \mu_0 (r_1 + r_2)}{2(r_2 - r_1)} \ln \frac{r_2}{r_1} H_{\text{ср}}.$$

В дальнейшем для упрощения расчетов неоднородность магнитного поля в поперечном сечении каждого участка магнитопровода учитывать не будем и будем считать, что поле в каждом участке однородное и определяется значениями напряженности и индукции на средней магнитной линии.

7.4. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ

Задачей расчета неразветвленной магнитной цепи в большинстве случаев является определение МДС $F = Iw$, необходимой для того, чтобы получить заданные значения магнитного потока или магнитной индукции в некотором участке магнитопровода (чаще всего в воздушном зазоре).

На рис. 7.9 приведен пример *неразветвленной магнитной цепи* — магнитопровод постоянного поперечного сечения S_1 с зазором. На этом же рисунке указаны другие геометрические размеры обоих участков магнитопровода: средняя длина l_1 магнитной линии первого участка из ферромагнитного материала и длина l_2 второго участка — воздушного зазора. Магнитные свойства ферромагнитного материала заданы основной кривой намагничивания $B(H)$ (рис. 7.10) и тем самым по (7.4) зависимостью $\mu_a(H)$.

По закону полного тока (7.2)

$$\sum_{k=1}^2 H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 = U_{\text{м1}} + U_{\text{м2}} = Iw = F, \quad (7.5)$$

где H_1 и H_2 — напряженности магнитного поля в первом и втором участках.

В воздушном зазоре значения магнитной индукции B_2 и напряженности H_2 связаны простым соотношением $B_2 = \mu_0 H_2$, а для участка

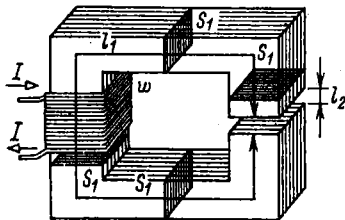


Рис. 7.9

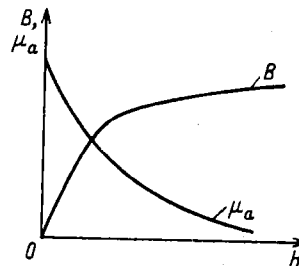


Рис. 7.10

из ферромагнитного материала $B_1 = \mu_{a1} H_1$. Кроме того, в неразветвленной магнитной цепи магнитный поток одинаков в любом поперечном сечении магнитопровода:

$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2, \quad (7.6)$$

где S_1 и S_2 — площади поперечного сечения участка из ферромагнитного материала и воздушного зазора.

Если задан магнитный поток Φ , то по (7.6) найдем значения индукций B_1 и B_2 . Напряженность поля H_1 определим по основной кривой намагничивания (рис. 7.10), а $H_2 = B_2/\mu_0$. Далее по (7.5) вычислим необходимое значение МДС.

Сложнее обратная задача: расчет магнитного потока при заданной МДС F .

Заменяя в (7.5) напряженности магнитного поля значениями индукции, получим

$$\frac{B_1}{\mu_{a1}} l_1 + \frac{B_2}{\mu_0} l_2 = Iw = F,$$

или с учетом (7.6)

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{l_1}{S_1 \mu_{a1}} + \frac{l_2}{S_2 \mu_0} \right) &= \Phi (r_{m1} + r_{m2}) = \\ &= \Phi \sum_{k=1}^2 r_{mk} = Iw = F, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $r_{mk} = l_k / S_k \mu_{ak}$ — магнитное сопротивление k -го участка магнитной цепи, причем магнитное сопротивление k -го участка нелинейное, если зависимость $B(H)$ для этого участка нелинейная (рис. 7.10), т. е. $\mu_{ak} \neq \text{const}$.

Для участка цепи с нелинейным магнитным сопротивлением r_m можно построить *вебер-амперную характеристику* — зависимость магнитного потока Φ от магнитного напряжения U_m на этом участке магнитопровода. Вебер-амперная характеристика участка магнитопровода рассчитывается по основной кривой намагничивания ферромагнитного материала $B(H)$. Чтобы построить вебер-амперную характеристику, нужно ординаты и абсциссы всех точек основной кривой намагничивания умножить соответственно на площадь поперечного сечения участка S и его среднюю длину l .

На рис. 7.11 приведены вебер-амперные характеристики $\Phi(U_{m1})$ для ферромагнитного участка с нелинейным магнитным сопротивлением r_{m1} и $\Phi(U_{m2})$ для воздушного зазора с постоянным магнитным сопротивлением $r_{m2} = l_2 / S_2 \mu_0$ магнитопровода по рис. 7.9.

Между расчетами нелинейных электрических цепей постоянного тока и магнитных цепей с постоянными МДС нетрудно установить аналогию. Действительно, из уравнения (7.7) следует, что магнитное напряжение на участке магнитной цепи равно произведению магнитного сопротивления участка на магнитный поток $U_M = r_M \Phi$. Эта зависимость аналогична закону Ома для резистивного элемента электрической цепи постоянного тока $U = rI$ [см. (1.1)]. Сумма магнитных напряжений в контуре магнитной цепи равна сумме МДС этого контура $\sum U_M = \sum F$ [см. (7.26)], что аналогично второму закону Кирхгофа для электрических цепей постоянного тока $\sum U = \sum E$ [см. (1.10)].

Продолжая дальше аналогию между электрическими цепями постоянного тока и магнитными цепями с постоянными МДС, представим неразветвленную магнитную цепь (рис. 7.9) схемой замещения (рис. 7.12, а). Эта схема замещения и схема замещения нелинейной электрической цепи с последовательным соединением элементов (см. рис. 6.2) полностью аналогичны (с точностью до обозначения параметров элементов). Следовательно, для анализа неразветвленных магнитных цепей (а также и разветвленных магнитных цепей) с постоянной МДС можно пользоваться всеми графическими и аналитическими методами расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока (§ 6.2).

Рис. 7.11

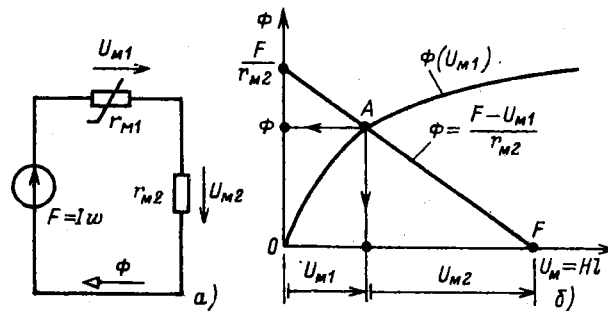
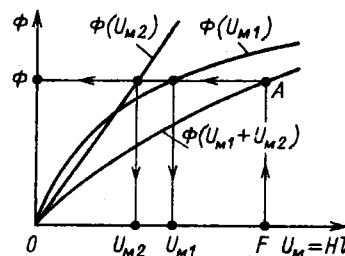


Рис. 7.12

В качестве иллюстрации ограничимся применением для анализа неразветвленной магнитной цепи (рис. 7.9 и схема замещения на рис. 7.12, а) графических методов: метода сложения вебер-амперных характеристик (рис. 7.11) и метода нагрузочной характеристики (рис. 7.12, б).

Согласно первому методу построим вебер-амперную характеристику всей неразветвленной магнитной цепи $\Phi(U_{M1} + U_{M2})$, графически складывая по напряжению вебер-амперные характеристики ее двух участков. При известной МДС $F = Iw$ по вебер-амперной характеристике всей магнитной цепи определим рабочую точку А, т. е. магнитный поток Φ , а по вебер-амперным характеристикам участков магнитопровода — магнитные напряжения на каждом из них.

Согласно второму методу для второго (линейного) участка построим нагрузочную характеристику согласно (6.1)

$$\Phi = U_{M2}/r_{M2} = (F - U_{M1})/r_{M2},$$

т. е. прямую, проходящую через точку F на оси абсцисс и точку F/r_{M2} на оси ординат. Точка пересечения А нагрузочной характеристики с вебер-амперной характеристикой ферромагнитного участка цепи $\Phi(U_{M1})$ определяет магнитный поток Φ в цепи и магнитные напряжения на ферромагнитном участке U_{M1} и воздушном зазоре U_{M2} . Значение индукции в воздушном зазоре $B_2 = \Phi/S_2$.

7.5. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ С ПОСТОЯННЫМ МАГНИТОМ

Рассмотрим расчет простейшей неразветвленной магнитной цепи с постоянным магнитом. Предположим, что тороид длиной l и площадью поперечного сечения S (рис. 7.13, а) изготовлен из магнитно-твердого материала, часть предельного статического цикла гистерезиса которого $B(H)$ изображена на рис. 7.13, б. Материал тороида был предварительно намагничен так, что его магнитное состояние характеризуется остаточной индукцией B_r .

Вырежем из тороида участок длиной $l_v \ll l$ (рис. 7.13, в). Оставшаяся часть тороида будет постоянным магнитом, а в образовавшемся воздушном зазоре магнитное поле возбуждается этим постоянным магнитом. Пренебрегая неоднородностью магнитного поля в воздушном зазоре, будем считать, что всюду в зазоре магнитное поле характеризуется напряженностью магнитного поля H_v и индукцией $B_v = \mu_0 H_v$. Учтем, что вследствие "выпучивания" магнитных линий в воздушном зазоре площадь поперечного сечения воздушного зазора S_v больше площади поперечного сечения постоянного магнита $S_M = S$.

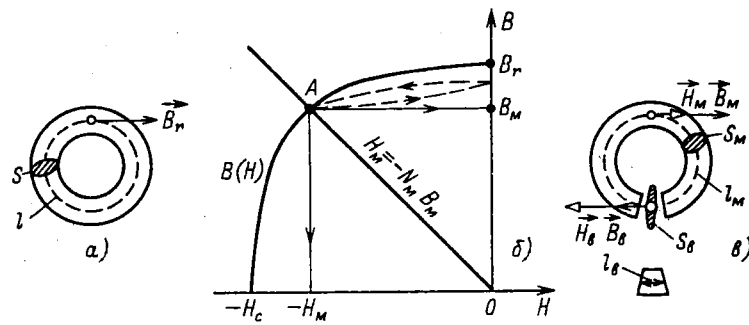


Рис. 7.13

По закону полного тока (7.5) для контура, совпадающего со средней линией магнитопровода,

$$H_M l_M + H_B l_B = 0, \quad (7.8)$$

где H_M и l_M — напряженность магнитного поля и длина средней линии постоянного магнита.

Из (7.8) следует, что

$$H_M = - \frac{l_B}{l_M} H_B = - \frac{l_B}{l_M} \frac{B_B}{\mu_0}. \quad (7.9)$$

Кроме того, так как магнитный поток Φ в неразветвленной магнитной цепи постоянен, то

$$S_B B_B = S_M B_M. \quad (7.10)$$

Подставив значение индукции в воздушном зазоре B_B из (7.10) в (7.9), получим уравнение прямой линии, проходящей через начало координат (рис. 7.13, б):

$$H_M = - \frac{S_M l_B}{S_B l_M} \frac{B_M}{\mu_0} = -N_M B_M, \quad (7.11)$$

где $N_M = S_M l_B / \mu_0 S_B l_M$ — коэффициент размагничивания постоянного магнита.

Точка пересечения A прямой $H_M = -N_M B_M$ и предельного статического цикла гистерезиса материала $B(H)$ определяет индукцию в магните $B = B_M$, а следовательно, и индукцию в воздушном зазоре по (7.10).

Если в воздушный зазор медленно вводить ферромагнитный замыкатель с малым магнитным сопротивлением, то значение индукции

в магнитопроводе будет увеличиваться по частному гистерезисному циклу, показанному на рис. 7.13, б штриховой линией. При многократном магнитном замыкании и размыкании воздушного зазора изменение индукции магнита происходит по некоторому установившемуся частному циклу.

Для получения больших значений индукции в воздушном зазоре необходимо изготавливать постоянный магнит из магнитно-твердых материалов, т. е. с большим значением коэрцитивной силы H_c .

7.6. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Принцип работы многих электромагнитных устройств постоянного тока, например электроизмерительных приборов, электромеханических реле, электромагнитов, основан на электромеханическом действии магнитного поля. Во всех этих устройствах для расчета сил, действующих на различные части магнитопроводов, часто требуется выразить силу через изменение энергии магнитного поля.

В качестве примера рассмотрим определение силы в системе, состоящей из двух катушек индуктивности: неподвижной с числом витков w_1 и подвижной с числом витков w_2 , подключенных согласно к источникам постоянного тока J_1 и J_2 (рис. 7.14).

Предположим, что под действием силы притяжения f катушка w_2 перемещается за время dt вдоль горизонтальной оси x на расстояние dx . За время dt от двух источников постоянного тока в рассматриваемую систему поступит энергия

$$p_1 dt + p_2 dt = u_1 J_1 dt + u_2 J_2 dt,$$

где p_1 и p_2 — мгновенные значения мощности источников; u_1 и u_2 — напряжения между выводами катушек.

Энергия источников тока без учета потерь в проводах катушек расходуется на механическую работу и на изменение энергии магнитного поля системы:

$$u_1 J_1 dt + u_2 J_2 dt = f dx + dW_m. \quad (7.12)$$

Напряжения u_1 и u_2 между выводами катушек возникают вследствие изменения полных потоко-сцеплений в каждой из них (см. § 2.22):

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 J_1 + M J_2; \\ \Psi_2 &= \Psi_{22} + \Psi_{21} = L_2 J_2 + M J_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Так как в рассматриваемой системе токи в катушках J_1, J_2 и индуктивности катушек L_1, L_2 постоянны, то изменения полных потоко-сцеплений Ψ_1 и Ψ_2 вызваны изменением (увеличением) взаимной

индуктивности M . (В общем случае изменяться могут и индуктивности катушек вследствие изменения геометрических размеров последних.) По закону электромагнитной индукции (2.78) напряжения между выводами катушек

$$u_1 = d\Psi_1/dt; \quad u_2 = d\Psi_2/dt. \quad (7.14)$$

С учетом (7.13) и (7.14) запишем уравнение (7.12) в виде

$$J_1 d\Psi_1 + J_2 d\Psi_2 = d(L_1 J_1^2 + L_2 J_2^2 + 2MJ_1 J_2) = f dx + dW_M. \quad (7.15)$$

В этом уравнении величина в скобках согласно (2.80) равна удвоенной энергии магнитного поля системы $2W_M$, откуда $dW_M = f dx$. Следовательно, электромеханическая сила, действие которой вызывает перемещение катушки w_2 , может быть найдена через соответствующее этому перемещению изменение энергии магнитного поля:

$$f = dW_M/dx. \quad (7.16)$$

Производная положительна, следовательно, электромеханическая сила f стремится переместить подвижную катушку так, чтобы энергия магнитного поля увеличилась. Такой же результат будет и при встречном включении катушек.

Применим условие (7.16) к ориентировочному расчету подъемной силы электромагнита, в котором магнитное поле возбуждается током I катушки (рис. 7.15).

Пренебрегая магнитным сопротивлением сердечника и якоря, найдем по (2.5) энергию однородного магнитного поля в воздушном зазоре высотой x и площадью поперечного сечения $2S/2$:

$$W_M = \frac{\Psi I}{2} = Y_M \frac{(Iw)^2}{2}, \quad (7.17)$$

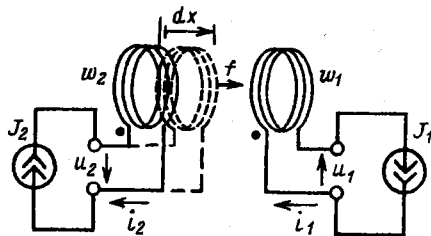


Рис. 7.14

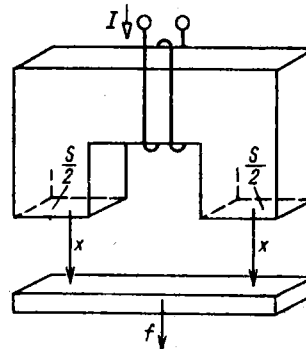


Рис. 7.15

где $\Psi = \mu_0 H S w$ — потокосцепление катушки электромагнита с числом витков w ; $Y_M = \mu_0 S/x$ — магнитная проводимость воздушного зазора; $H = Iw/x$ — напряженность в воздушном зазоре.

Полагая, что ток I постоянный, находим по (7.16)

$$f = \frac{(Iw)^2}{2} \frac{dY_M}{dx} = - \frac{w^2 \mu_0 S}{2x^2} I, \quad (7.18)$$

т. е. якорь перемещается в направлении увеличения проводимости воздушного зазора (уменьшения x).

При значении $x \rightarrow 0$ нельзя уже пренебречь магнитными сопротивлениями сердечника и якоря и погрешность расчета по (7.18) возрастает.

В общем случае энергия магнитного поля системы зависит не только от взаимного расположения ее частей, поэтому при определении сил, возникающих в магнитном поле, следует пользоваться понятием частной производной от энергии магнитного поля по координате перемещения подвижной части.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

КАТУШКА С МАГНИТОПРОВОДОМ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

8.1. ПОНЯТИЕ ОБ ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ КАТУШКЕ С МАГНИТОПРОВОДОМ

Конструкции магнитопроводов и их функциональные назначения в электротехнических устройствах переменного тока (машинах переменного тока, трансформаторах и т. д.) весьма разнообразны. В этой главе рассмотрим только катушки с неразветвленными магнитопроводами из ферромагнитного материала.

Переменный ток i в обмотке возбуждает в магнитопроводе и вокруг него переменное магнитное поле.

При расчетах цепей, содержащих катушки с магнитопроводом, во многих случаях допустимы упрощения реальных условий.

Качественно картина магнитных линий реальной катушки с магнитопроводом изображена на рис. 8.1 штриховыми линиями. Большая часть магнитных линий замыкается по магнитопроводу — это основной магнитный поток Φ . Другая часть магнитных линий охватывает отдельные витки и группы витков, замыкается по воздуху и частично по магнитопроводу. Эта часть магнитного поля трудно поддается количественному расчету и характеризуется обычно интегральной величиной, называемой *потокосцеплением рассеяния* $\Psi_{\text{рас}}$.

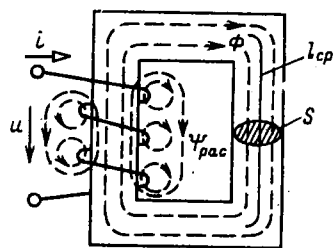


Рис. 8.1

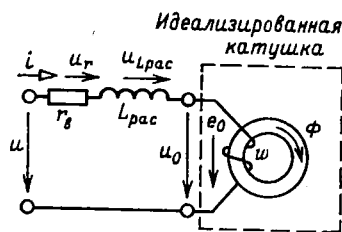


Рис. 8.2

Потокосцепление рассеяния $\Psi_{\text{рас}}$ в основном зависит от конструкции обмотки, т. е. взаимного расположения ее витков, сечения провода и т. д., и в меньшей степени — от магнитных свойств магнитопровода.

В воздухе (линейная среда) индукция пропорциональна напряженности магнитного поля: $B = \mu_0 H$. Поэтому можно считать, что потокосцепление рассеяния пропорционально току:

$$\Psi_{\text{рас}} = L_{\text{рас}} i,$$

где $L_{\text{рас}}$ — индуктивность рассеяния обмотки — постоянная величина.

Полное потокосцепление с витками катушки

$$\Psi = w\Phi + \Psi_{\text{рас}} \quad (8.1)$$

С учетом активного сопротивления обмотки $r_{\text{в}}$ и потокосцепления рассеяния напряжение между выводами катушки определяется выражением

$$\begin{aligned} u &= r_{\text{в}} i + \frac{d\Psi}{dt} = r_{\text{в}} i + \frac{d\Psi_{\text{рас}}}{di} \frac{di}{dt} + w \frac{d\Phi}{dt} = \\ &= r_{\text{в}} i + L_{\text{рас}} \frac{di}{dt} + w \frac{d\Phi}{dt} = u_r + u_{L_{\text{рас}}} + u_0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Из (8.2) следует, что реальную катушку с магнитопроводом можно представить схемой замещения в виде последовательного соединения резистивного элемента с сопротивлением витков обмотки $r_{\text{в}}$, индуктивного элемента с индуктивностью рассеяния $L_{\text{рас}}$ и так называемой *идеализированной катушки* (рис. 8.2).

У идеализированной катушки обмотка не имеет индуктивности рассеяния и активного сопротивления. Свойства идеализированной катушки зависят только от параметров магнитопровода и режима ее намагничивания, а напряжение между ее выводами определяется ЭДС самоиндукции по (2.3) $u_0 = -e_0 = w d\Phi/dt$ в витках обмотки (рис. 8.2).

8.2. ПРОЦЕССЫ НАМАГНИЧИВАНИЯ МАГНИТОПРОВОДА ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ КАТУШКИ

Рассмотрим режим намагничивания магнитопровода идеализированной катушки, подключенной к источнику синусоидальной ЭДС. На основании второго закона Кирхгофа для контура, обозначенного на рис. 8.3, *а* штриховой линией, получим уравнение

$$u_0 = -e_0 \quad (8.3a)$$

или

$$u_0 = U_{0m} \sin \omega t = w d\Phi/dt. \quad (8.3б)$$

Из этого уравнения найдем закон изменения во времени магнитного потока. Так как

$$d\Phi = \frac{U_{0m}}{w} \sin \omega t dt,$$

то

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{U_{0m}}{w} \int \sin \omega t dt = - \frac{U_{0m}}{\omega w} \cos \omega t + A = \\ &= \frac{U_0 \sqrt{2}}{2\pi f w} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + A. \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования A равна некоторому постоянному магнитному потоку, которого нет в магнитопроводах аппаратов переменного тока в установившемся режиме работы. Следовательно, постоянная $A=0$ и магнитный поток

$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t - \pi/2), \quad (8.4a)$$

где

$$\Phi_m = U_0/4,44fw \quad (8.4б)$$

т. е. при синусоидальном напряжении между выводами идеализированной катушки магнитный поток в магнитопроводе также синусоидальный и не зависит от свойств ферромагнитного материала.

Так как действующие значения напряжения U_0 между выводами идеализированной катушки и ЭДС самоиндукции E_0 одинаковые [см. (8.3a)], то из (8.4б) получим

$$E_0 = 4,44fw\Phi_m. \quad (8.4в)$$

Последнее соотношение применяют для расчетов ЭДС, индуцируемых в обмотках трансформаторов; поэтому его часто называют уравнением трансформаторной ЭДС.

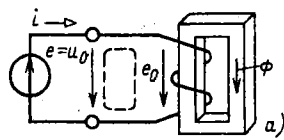


Рис. 8.3

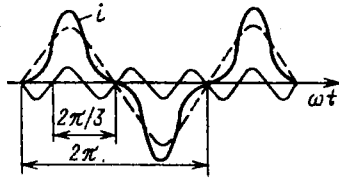
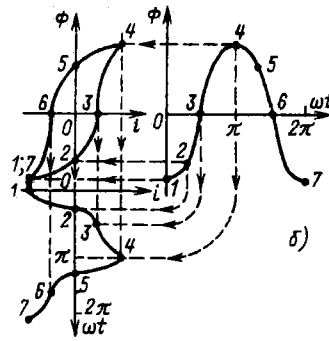


Рис. 8.4

Рассмотрим теперь изменение тока в обмотке идеализированной катушки. При заданной петле гистерезиса материала магнитопровода, например на рис. 7.6, б, построим вебер-амперную характеристику $\Phi(i)$ рассматриваемой идеализированной катушки. Для этого ординаты петли умножим на площадь S поперечного сечения магнитопровода ($\Phi = BS$), а абсциссы умножим на среднюю длину l магнитопровода и разделим на число витков обмотки (по закону полного тока $i = NI/w$).

Полученная характеристика показана на рис. 8.3, б. На том же рисунке построены по (8.4а) синусоидальный магнитный поток и графически зависимость тока в обмотке от времени. Из рисунка видно, что при синусоидальном потоке из-за нелинейности характеристики $\Phi(i)$ ток несинусоидальный. Чем больше насыщение магнитопровода, тем сильнее отличается ток от синусоидального.

Сопоставив график изменения намагничивающего тока с графиком, полученным путем сложения двух синусоид, частота одной из которых в 3 раза больше частоты другой (рис. 8.4), можно заметить, что при насыщении магнитопровода намагничивающий ток прежде всего содержит значительную третью гармоническую составляющую. Различие в графиках намагничивающего тока на рис. 8.3, б и 8.4 объясняется тем, что в первом случае ток содержит кроме первой и третьей гармоник также и другие гармонические составляющие.

8.3. УРАВНЕНИЯ, СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ И ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ РЕАЛЬНОЙ КАТУШКИ С МАГНИТОПРОВОДОМ

В зависимости от параметров магнитопровода и режима его намагничивания для анализа реальной катушки можно принять различные упрощающие допущения.

Рассмотрим сначала особенности анализа катушки с магнитопроводом, учитывая только статические магнитные свойства последнего (см. рис. 7.6).

1. Магнитопровод изготовлен из ферромагнитного материала с практически линейной зависимостью индукции от напряженности магнитного поля: $B = \mu_r \mu_0 H$ (см. рис. 7.6, в).

В однородном замкнутом неразветвленном магнитопроводе идеализированной катушки (рис. 8.2) с площадью поперечного сечения S можно считать магнитное поле однородным, т. е. $\Phi = BS$, где B — индукция на средней линии магнитопровода, определяется по напряженности магнитного поля на средней линии $H = iw/l_{\text{ср}}$.

Так как в рассматриваемом случае зависимость между индукцией и напряженностью магнитного поля в магнитопроводе линейная, то

$$\Phi = BS = \mu_r \mu_0 HS = \frac{\mu_r \mu_0 S w}{l_{\text{ср}}} i. \quad (8.5)$$

Подставив значение магнитного потока в магнитопроводе идеализированной катушки из (8.5) в (8.4), получим напряжение между выводами реальной катушки (рис. 8.2):

$$u = r_{\text{в}} i + L_{\text{рас}} di/dt + L di/dt, \quad (8.6)$$

где $L = \mu_r \mu_0 S w^2 / l_{\text{ср}}$ — индуктивность идеализированной катушки.

В цепи синусоидального тока выражению (8.6) соответствует схема замещения реальной катушки (рис. 8.5, а) с магнитопроводом, выполненным из магнитного материала с линейными свойствами. Схема замещения идеализированной катушки — линейный индуктивный элемент — обведена на рисунке штриховой линией.

Так как все элементы схемы замещения реальной катушки линейные, то для ее расчета можно пользоваться комплексным методом, результаты которого с учетом (2.33) иллюстрирует векторная диаграмма на рис. 8.5, б.

2. Магнитопровод изготовлен из ферромагнитного материала с округлой статической петлей гистерезиса (см. рис. 7.6, б).

Определим магнитостатические свойства магнитопровода зависимостью $B(H)$ (рис. 8.6), где $B = \Phi/S$ — среднее значение индукции в поперечном сечении площадью S , $H = iw/l_{\text{ср}}$ — напряженность на средней линии длиной $l_{\text{ср}}$. Статическую петлю гистерезиса магнитопровода $B(H)$ для приближенного анализа процессов в идеализиро-

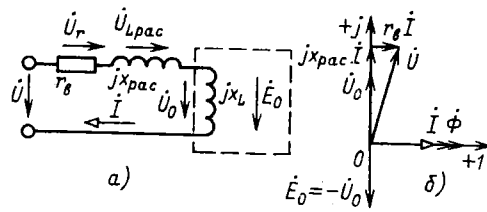


Рис. 8.5

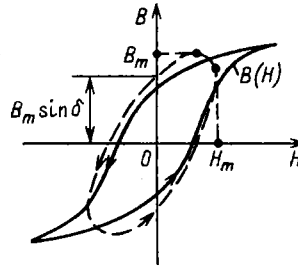


Рис. 8.6

ванной катушке (рис. 8.2) заменим эквивалентным эллипсом. Эквивалентный эллипс с центром в начале координат должен иметь такие формы, расположение и направление обхода, чтобы его уравнение $B(H)$ с достаточной точностью описывало процесс намагничивания магнитопровода по статической петле гистерезиса $B(H)$. Обычно общая площадь эквивалентного эллипса и петли гистерезиса должна составлять не менее 80–90% площади каждого из них в отдельности.

При синусоидальном изменении напряжения питания u представим уравнение эквивалентного эллипса в параметрической форме:

$$B = B_m \sin \omega t; \quad H = H_m \sin(\omega t + \delta), \quad (8.7)$$

где B_m и H_m — максимальные значения индукции и напряженности; δ — угол сдвига фаз между напряженностью и индукцией; ω — угловая частота перемагничивания магнитопровода; t — время.

Так как индукция и напряженность магнитного поля в магнитопроводе при замене петли гистерезиса эквивалентным эллипсом изменяются по синусоидальному закону, то для расчета цепи идеализированной катушки можно применить комплексный метод. Для этого представим напряженность и индукцию магнитного поля соответствующими им комплексными значениями (2.21): $\dot{H} = H_m e^{j\delta}/\sqrt{2}$; $\dot{B} = B_m/\sqrt{2}$. Запишем комплексные значения тока $\dot{I}$ в идеализированной катушке по (7.2а), напряжения между ее выводами U_0 и ЭДС самоиндукции $\dot{E}_0$ — по (2.33) и (8.1):

$$\dot{I} = I_{cp} H/w = I e^{j\delta}; \quad (8.8a)$$

$$\dot{U}_0 = -\dot{E}_0 = j\omega wBS = jU_0, \quad (8.8б)$$

где $I = I_{\text{ср}} H_m / \sqrt{2} w$ и $U_0 = E_0 = \omega w S B_m / \sqrt{2}$ — действующие значения тока, напряжения и ЭДС самоиндукции идеализированной катушки.

По закону Ома в комплексной форме [см. (2.47)] с учетом (2.23) и (8.8) найдем комплексное сопротивление идеализированной катушки в цепи синусоидального тока:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\dot{U}_0}{I} = j \frac{U_0}{I} e^{-j\delta} = \frac{U_0}{I} e^{j(90^\circ - \delta)} = \\ &= \frac{U_0}{I} \sin \delta + j \frac{U_0}{I} \cos \delta = r_\Gamma + jx_L = r_\Gamma + j\omega L, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где

$$r_\Gamma = \omega w^2 \frac{B_m S}{H_m l_{\text{ср}}} \sin \delta$$

и

$$x_L = \omega w^2 \frac{B_m S}{H_m l_{\text{ср}}} \cos \delta$$

— активное сопротивление, учитывающее потери на гистерезис, и индуктивное сопротивление идеализированной катушки.

Заменяв идеализированную катушку последовательным соединением резистивного элемента r_Γ и индуктивного элемента x_L , получим схему замещения реальной катушки для рассматриваемого случая (рис. 8.7, а). Из (8.86) и (8.9) видно, что ЭДС самоиндукции E_0 идеализированной катушки соответствует ветвь схемы замещения, которая при наличии потерь в магнитопроводе содержит резистивный элемент.

Часто для реальной катушки составляют схему замещения по рис. 8.7, б, которая получается из схемы замещения на рис. 8.7, а после замены последовательного соединения резистивного и индуктивного элементов схемы замещения идеализированной катушки эквивалентным параллельным соединением элементов (2.7):

$$g = \frac{r_\Gamma}{r_\Gamma^2 + (\omega L)^2}; \quad b_L = \frac{\omega L}{r_\Gamma^2 + (\omega L)^2},$$

где g и b_L — активная и индуктивная проводимости идеализированной катушки.

На рис. 8.8 приведена векторная диаграмма схемы замещения реальной катушки (рис. 8.7, б), на которой принят по (8.7) вектор $\Phi = BS$ с нулевой начальной фазой. Вектор тока I , как следует из

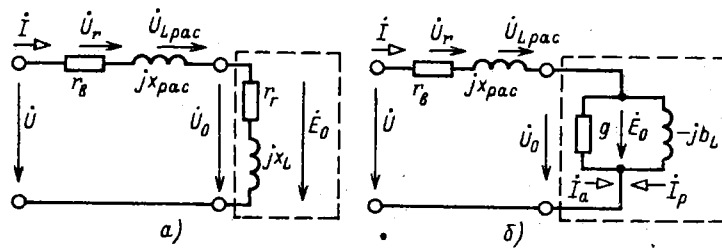


Рис. 8.7

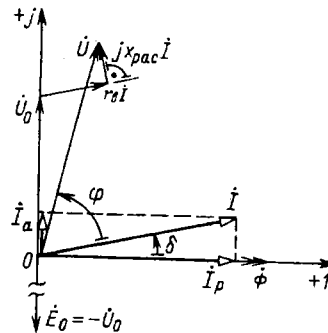


Рис. 8.8

(8.7) и (8.8a), опережает вектор магнитного потока на угол δ , называемый *углом потерь* идеализированной катушки. Ток $\vec{I}$ представлен в виде суммы активной $\vec{I}_a$ и реактивной $\vec{I}_p$ составляющих тока, причем активная составляющая тока $\vec{I}_a$ совпадает по фазе с напряжением $\vec{U}_0$, а реактивная $\vec{I}_p$ отстает по фазе от напряжения $\vec{U}_0$ на угол $\pi/2$.

Для определения напряжения $\vec{U}$ между выводами реальной катушки необходимо к напряжению идеализированной катушки $\vec{U}_0$ прибавить падения напряжения на активном сопротивлении $\vec{U}_r = r_g \vec{I}$ и индуктивном сопротивлении рассеяния $\vec{U}_{Lpac} = jx_{pac} \vec{I}$ обмотки. Вектор комплексного значения ЭДС самоиндукции $\vec{E}_0$ отстает по фазе от вектора комплексного значения магнитного потока Φ в магнитопроводе на угол $\pi/2$ [см. (8.8б)].

В общем случае зависимость среднего значения индукции от напряженности магнитного поля на средней линии в магнитопроводе определяется не по статическому, а по динамическому циклу гистерезиса (см. § 8.4). Поэтому эквивалентный эллипс, определяющий параметры схемы замещения идеализированной катушки в цепи переменного тока, в общем случае должен соответствовать динамическому циклу гистерезиса.

8.4. МОЩНОСТЬ ПОТЕРЬ В МАГНИТОПРОВОДЕ

Наличие гистерезиса приводит к потерям энергии в магнитопроводе. Действительно, в любой момент времени мощность потерь идеализированной катушки (рис. 8.7)

$$p = u_0 i = \left(w \frac{d\Phi}{dt} \right) \left(\frac{H l_{\text{ср}}}{w} \right) = S w \frac{dB}{dt} \frac{l_{\text{ср}}}{w} H = S l_{\text{ср}} H \frac{dB}{dt},$$

где u_0 — напряжение между выводами идеализированной катушки;
 i — ток в катушке.

Для периодического тока средняя мощность потерь, т. е. активная мощность идеализированной катушки за один период,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_0 i dt = S l_{\text{ср}} \oint H dB \quad (8.10)$$

пропорциональна площади петли гистерезиса, умноженной на объем магнитопровода $V = S l_{\text{ср}}$.

Площадь петли гистерезиса, как указывалось, в общем случае отличается от площади статической петли гистерезиса. Действительно, при изменяющемся во времени магнитном потоке в магнитопроводе индуцируются вихревые токи i_v (рис. 8.9, а), которые зависят как от частоты магнитного потока, так и от удельной электрической проводимости материала и конструкции магнитопровода. Вихревые токи i_v вызывают дополнительные потери энергии и нагрев магнитопровода. Кроме того, вихревые токи оказывают размагничивающее действие в магнитопроводе. Поэтому прежнее значение магнитного потока, а значит, и индукции при учете вихревых токов получается при большем намагничивающем токе, а значит, и при большей напряженности магнитного поля.

Следовательно, площадь *динамической петли гистерезиса* $B_{\text{дин}}(H)$ для магнитопровода, в котором возникают вихревые токи, больше площади соответствующей статической петли гистерезиса $B(H)$ (рис. 8.10). Если при этом статическая петля гистерезиса находится внутри динамической петли гистерезиса, то мощность потерь в магнитопроводе можно разделить на две составляющие.

Мощность потерь на гистерезис пропорциональна площади статической петли гистерезиса, показанной на рис. 8.10 без штриховки. *Мощность потерь на вихревые токи* пропорциональна площади, показанной на рис. 8.10 штриховкой и равной разности между площадями динамической и статической петель гистерезиса.

Для уменьшения вихревых токов в магнитопроводах, во-первых, можно уменьшить площадь контуров, охватываемых вихревыми токами, во-вторых, можно увеличить удельное электрическое сопротивление

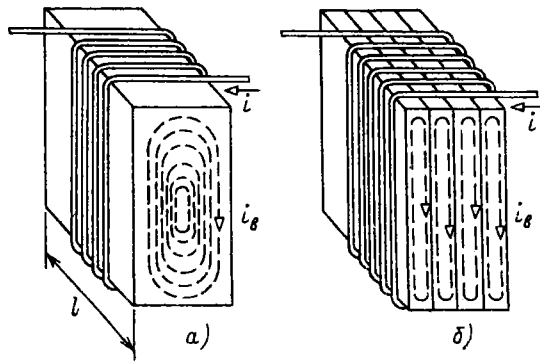


Рис. 8.9

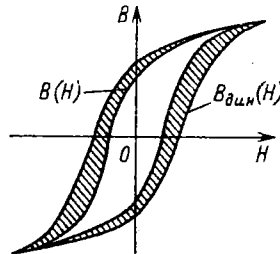


Рис. 8.10

ние самого материала. Для уменьшения площади контуров вихревых токов при частотах до 20 кГц магнитопроводы собираются из тонких листов электротехнической стали, изолированных лаком (рис. 8.9. б).

При промышленной частоте тока в катушке 50 Гц толщина листов обычно равна 0,35–0,5 мм. При более высоких частотах толщина листов уменьшается до 0,02–0,05 мм. В материал магнитопровода добавляется 0,5–4,5% кремния (Si); такая присадка значительно увеличивает удельное электрическое сопротивление материала и мало влияет на его магнитные свойства.

Мощность потерь на гистерезис в технических задачах можно определить по формуле

$$P_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} f B_m^n G, \quad (8.11)$$

где σ_{Γ} — гистерезисный коэффициент, значение которого зависит от сорта электротехнической стали и определяется из опыта; f — частота; G — масса магнитопровода; B_m — амплитуда магнитной индукции; практически показатель степени $n = 1,6$ при $B_m < 1$ Тл и $n = 2$ при $B > 1$ Тл.

Мощность потерь на вихревые токи может быть выражена формулой

$$P_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}} f^2 \gamma G B_m^2, \quad (8.12)$$

Таблица 8.1. Удельная мощность потерь в листовой электротехнической стали при разных значениях индукции

B_m , Тл	Марка 1511-0,35, Вт/кг	Марка 1511-0,50, Вт/кг	B_m , Тл	Марка 1511-0,35, Вт/кг	Марка 1511-0,50, Вт/кг
0,6	0,585	0,685	1,1	1,61	1,92
0,7	0,685	0,89	1,2	1,94	2,24
0,8	0,855	1,13	1,3	2,31	2,58
0,9	1,05	1,38	1,4	2,66	2,95
1,0	1,3	1,64	1,5	3	3,4

где σ_v — коэффициент вихревых токов, значение которого зависит от сорта электротехнической стали и конструкции магнитопровода; f — частота; G — масса магнитопровода; γ — удельная проводимость материала; B_m — амплитуда магнитной индукции.

При значениях индукции больше 1 Тл можно считать, что мощность суммарных потерь в магнитопроводе пропорциональна B_m^2 и, следовательно, Φ_m^2 . Таким образом, мощность потерь в магнитопроводе $P = P_r + P_v$ пропорциональна квадрату амплитуды потока, подобно тому как мощность потерь в проводах обмотки пропорциональна квадрату амплитуды тока.

При расчетах электротехнических устройств для определения мощности потерь в магнитопроводах, выполненных из электротехнической стали, применяются справочные таблицы, в которых дана зависимость мощности суммарных потерь от амплитуды магнитной индукции (табл. 8.1).

8.5. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КАТУШКИ С МАГНИТОПРОВОДОМ

Если амплитуда тока в катушке настолько велика, что значение индукции в магнитопроводе достигает области технического насыщения, то катушку уже нельзя представить линейной схемой замещения. Как элемент электрической цепи такая катушка задается нелинейной вольт-амперной характеристикой — зависимостью действующего значения переменного напряжения между выводами катушки от действующего значения переменного тока.

Для упрощения анализа нелинейной катушки с магнитопроводом будем пренебрегать индуктивностью рассеяния и активным сопротивлением обмотки, а также гистерезисом и вихревыми токами. Будем еще считать, что нелинейная зависимость среднего значения индукции $B = \Phi/S$ от напряженности магнитного поля $H = iw/l_{cp}$ на средней ли-

нии магнитопровода приближенно определяется нелинейным уравнением

$$B = aH - cH^3,$$

где B и H — мгновенные значения индукции и напряженности магнитного поля; a и c — коэффициенты, зависящие от свойств ферромагнитного материала и конструкции магнитопровода, например длины воздушного зазора. Принятая зависимость $B(H)$ подобна основной кривой намагничивания (см. рис. 7.7).

Предположим, что катушка подключена к источнику синусоидального тока:

$$i = I_m \sin \omega t.$$

При этом магнитный поток в магнитопроводе катушки

$$\Phi = BS = aSH - cSH^3 = \frac{awS}{l_{cp}} I_m \sin \omega t - \frac{cSw^3}{l_{cp}^3} I_m^3 \sin^3 \omega t, \quad (8.13)$$

а напряжение между выводами катушки по (7.16)

$$u = w \frac{d\Phi}{dt} = \frac{aS\omega w^2}{l_{cp}} I_m \cos \omega t - \frac{3cS\omega w^4}{l_{cp}^3} I_m^3 \sin^2 \omega t \cos \omega t. \quad (8.14)$$

Учитывая, что

$$\sin^2 \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin \omega t \sin 2\omega t = \frac{1}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t),$$

напряжение (8.14) можно представить в виде

$$u = \left(\frac{aS\omega w^2}{l_{cp}} I_m - \frac{3cS\omega w^4}{4l_{cp}^3} I_m^3 \right) \cos \omega t + \frac{3cS\omega w^4}{4l_{cp}^3} I_m^3 \cos 3\omega t = U_{1m} \cos \omega t + U_{3m} \cos 3\omega t, \quad (8.15)$$

т. е. напряжение между выводами нелинейной катушки при синусоидальном токе кроме основной гармоники содержит еще и третью. Амплитуда U_{3m} третьей гармоники часто много меньше амплитуды U_{1m} основной гармоники. В этом случае при вычислении действующего значения напряжения третью гармонику можно не учитывать. Отношение действующих значений или амплитуд напряжения и тока (первых

гармоник) определяет индуктивное сопротивление катушки

$$x_L = \frac{U}{I} = \frac{U_{1m}}{I_m} = \omega \left(\frac{aSw^2}{l_{cp}} - \frac{3cSw^4}{2l_{cp}^3} I^2 \right) = \omega L(I), \quad (8.16)$$

где

$$L(I) = \frac{aSw^2}{l_{cp}} - \frac{3cSw^4}{2l_{cp}^3} I^2 \quad (8.17)$$

— нелинейная индуктивность идеализированной катушки без учета высших гармоник. Так как при сделанном допущении ток и напряжение изменяются синусоидально, то для расчета цепи можно пользоваться комплексным методом.

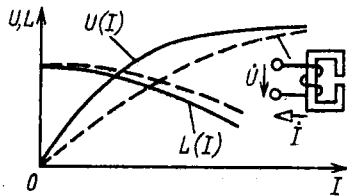


Рис. 8.11

Из (8.17) видно, что индуктивное сопротивление нелинейной катушки с магнитопроводом уменьшается с увеличением действующего значения тока.

На рис. 8.11 сплошными линиями показаны нелинейная вольт-амперная характеристика $U(I)$ и характеристика нелинейной индуктивности $L(I)$ идеализированной катушки с магнитопроводом. Если магнитопровод катушки имеет воздушный зазор, то нелинейность вольт-амперной характеристики уменьшается, так как уменьшается (см. рис. 7.11) нелинейность вебер-амперной характеристики магнитопровода (рис. 8.11, штриховая линия).

С учетом гистерезиса, вихревых токов, индуктивности рассеяния, активного сопротивления обмотки и высших гармоник вольт-амперная характеристика реальной катушки с магнитопроводом несколько отличается от вольт-амперной характеристики идеализированной катушки.

8.6. ЯВЛЕНИЕ ФЕРРОРЕЗОНАНСА

Если колебательный контур, в котором возможен резонанс (см. § 2.21), содержит катушку с магнитопроводом, то возможно появление феррорезонанса. В зависимости от вида соединения элементов колебательного контура различают две основные формы феррорезонанса: феррорезонанс напряжений и феррорезонанс токов.

Феррорезонанс напряжений может возникнуть в цепи (рис. 8.12, а), состоящей из соединенных последовательно катушки с магнитопроводом и конденсатора, подключенных к источнику синусоидального напряжения. Магнитопровод катушки должен быть замкнутым; так

как воздушный зазор в магнитной цепи сильно уменьшает нелинейность ее вольт-амперной характеристики (см. рис. 8.11).

Для пояснения явления феррорезонанса напряжений будем пренебрегать всеми видами потерь энергии в цепи, а также высшими гармониками напряжений и тока. Это позволит применить комплексный метод расчета. Напряжение питания между выводами цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C = j\omega L(I)\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}, \quad (8.18)$$

где напряжения на индуктивном $\dot{U}_L$ и емкостном $\dot{U}_C$ элементах противоположны по фазе (см. рис. 2.44). Следовательно, действующее значение напряжения питания равно модулю разности действующих значений напряжений на индуктивном и емкостном элементах:

$$U = |U_L - U_C|. \quad (8.19)$$

Для определения модуля этой разности построим (рис. 8.12, б) в общей системе координат вольт-амперные характеристики нелинейного индуктивного элемента с учетом (8.17):

$$U_L(I) = \omega L(I)I = x_L(I)I$$

и линейного емкостного элемента:

$$U_C(I) = (1/\omega C)I = x_C I.$$

На том же рисунке по (8.19) построена вольт-амперная характеристика $U(I)$ всей цепи, подключенной к источнику.

При малых значениях напряжения питания $\dot{U}$ ток в цепи $\dot{I}$ отстает по фазе от этого напряжения на четверть периода, так как сопротивление цепи имеет индуктивный характер ($U_L > U_C$). При постепенном повышении напряжения питания действующие значения тока I и напряжений U_L и U_C увеличиваются. Наконец, напряжение питания приближается к критическому значению U_1 , определяемому рабочей точкой M — точкой касания прямой, параллельной оси абсцисс, вольт-амперной характеристики цепи.

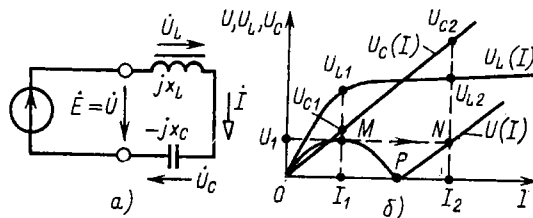


Рис. 8.12

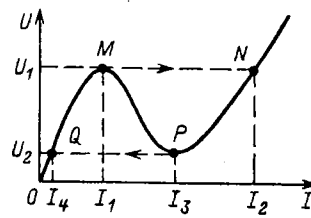


Рис. 8.13

При дальнейшем самом малом увеличении напряжения питания U ток изменится скачком от значения I_1 до значения I_2 (рабочая точка N). Одновременно скачком изменятся напряжения: на индуктивном элементе — от U_{L1} до U_{L2} — незначительное увеличение из-за насыщения — и резко увеличится напряжение на емкостном элементе — от U_{C1} до U_{C2} . При дальнейшем увеличении напряжения питания $U > U_1$ (после скачкообразных изменений напряжения и тока) наблюдается плавное увеличение тока и напряжений U_L и U_C .

Если плавно уменьшить напряжение питания U (теоретически до нуля), можно добиться резонанса напряжений, т. е. равенства $U_C = U_L$, которому соответствует рабочая точка P на вольт-амперной характеристике цепи. В действительности из-за наличия потерь энергии в катушке вольт-амперная характеристика цепи (рис. 8.13) отличается от построенной на рис. 8.12, б. Рабочей точке P соответствует не напряжение $U = 0$, а напряжение $U_2 > 0$. При дальнейшем самом малом уменьшении напряжения питания U ток изменится скачком от I_3 до I_4 (рабочая точка Q). Теперь при уменьшении напряжения до нуля ток плавно уменьшается до нуля (начало координат).

Напряжение U_L между выводами катушки с насыщенным магнитопроводом мало изменяется при изменении напряжения питания (участок $U_L > U_{L1}$ на рис. 8.12, б). Эта особенность вольт-амперной характеристики используется в *феррорезонансных стабилизаторах*, у которых напряжение на катушке служит выходным стабилизированным напряжением.

Феррорезонанс токов может наблюдаться при параллельном соединении катушки с магнитопроводом и конденсатора при питании цепи от источника синусоидального напряжения. Анализ феррорезонанса токов аналогичен анализу феррорезонанса напряжений. Однако при питании от источника синусоидального напряжения скачкообразных изменений общего тока нет.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ТРАНСФОРМАТОРЫ

9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Трансформатором называется статическое (т. е. без движущихся частей) электромагнитное устройство, предназначенное чаще всего для преобразования одного переменного напряжения в другое (или другие) напряжение той же частоты. Трансформатор имеет не менее двух обмоток с общим магнитным потоком, которые электрически изолированы друг от друга (за исключением автотрансформаторов).

Для усиления индуктивной связи и снижения влияния вихревых токов в большинстве трансформаторов обмотки размещаются на магнитопроводе, собранном из листовой электротехнической стали (рис. 9.1). Магнитопровод отсутствует лишь в воздушных трансформаторах, которые применяются при частотах примерно свыше 20 кГц, при которых магнитопровод все равно практически не намагничивается из-за значительного увеличения вихревых токов.

Обмотка трансформатора, присоединенная к источнику питания (сеть электроснабжения, генератор), называется *первичной*. Соответственно первичными именуются все величины, относящиеся к этой обмотке, — число витков, напряжение, ток и т. д. Буквенные обозначения их снабжаются индексом 1, например w_1 , u_1 , i_1 (рис. 9.1). Обмотка, к которой подключается приемник (потребитель электроэнергии), и относящиеся к ней величины называются *вторичными* (индекс 2).

Различают однофазные (для цепей однофазного тока) и трехфазные (для трехфазных цепей) трансформаторы. У трехфазного трансформатора *первичной* или *вторичной* обмоткой принято называть соответственно совокупности трех фазных обмоток одного напряжения. На рис. 9.2 показаны основные условные графические обозначения однофазного (1, 2, 3) и трехфазного (4, 5, 6) трансформаторов.

На щитке трансформатора указываются его номинальные напряжения — высшее и низшее, в соответствии с чем следует различать *обмотку высшего напряжения* (ВН) и *обмотку низшего напряжения* (НН) трансформатора. Кроме того, на щитке должны быть указаны его номинальная полная мощность (В · А или кВ · А), токи (А) при номинальной полной мощности, частота, число фаз, схема соединений, режим работы (длительный или кратковременный) и способ охлаждения. В зависимости от способа охлаждения трансформаторы делят на сухие и масляные. В последнем случае выемная часть трансформатора погружается в стальной бак, заполненный маслом. На рис. 9.3 показан трансформатор трехфазный масляный с трубчатым

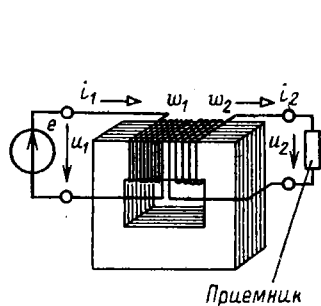


Рис. 9.1

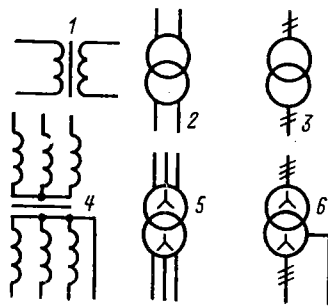


Рис. 9.2

баком (в частичном разрезе), где 1 — магнитопровод; 2 — обмотка НН в разрезе; ниже нее и на среднем стержне магнитопровода неразрезанные катушки обмотки ВН — 3; 4 — выводы обмотки ВН; 5 — выводы обмотки НН; 6 — трубчатый бак для масляного охлаждения; 7 — кран для заполнения маслом; 8 — выхлопная труба для газов; 9 — газовое реле; 10 — расширитель для масла; 11 — кран для спуска масла.

Если первичное напряжение U_1 трансформатора меньше вторичного U_2 , то он работает в режиме *повышающего трансформатора*, в противном случае ($U_1 > U_2$) — в режиме *понижающего трансформатора*.

Впервые с техническими целями трансформатор был применен П. Н. Яблочковым в 1876 г. для питания электрических свечей. Но особенно широко трансформаторы стали применяться после того, как М. О. Доливо-Добровольским была предложена трехфазная система передачи электроэнергии и разработана конструкция первого трехфазного трансформатора (1891 г.).

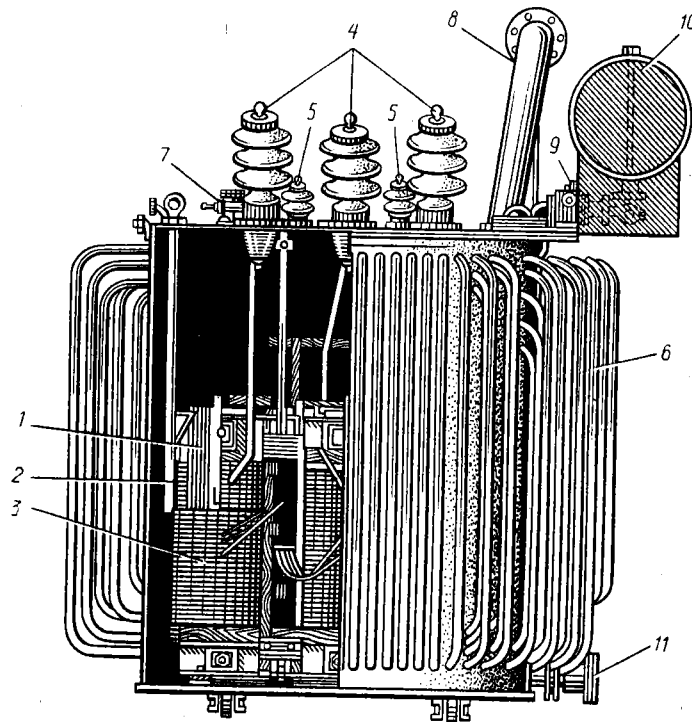


Рис. 9.3

Рабочий процесс однофазного трансформатора практически такой же, как и одной фазы трехфазного трансформатора. Поэтому, чтобы облегчить изложение, сначала рассмотрим работу однофазного двухобмоточного трансформатора, а затем уже отметим особенности трехфазных трансформаторов.

9.2. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ОДНОФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

На рис. 9.4, а приведена принципиальная конструкция однофазного трансформатора. Со стороны вторичной обмотки, содержащей w_2 витков, т. е. для приемника с сопротивлением нагрузки r_2 , трансформатор является источником электроэнергии, а со стороны первичной обмотки, содержащей w_1 витков, — приемником энергии от источника питания.

Рассмотрим принцип действия однофазного трансформатора. Предположим сначала, что цепь вторичной обмотки трансформатора разомкнута и при действии источника напряжения $u_1 = e$ ток в первичной обмотке равен i_1 . Магнитодвижущая сила $i_1 w_1$ возбуждает в магнитопроводе магнитный поток, положительное направление которого определяется правилом буравчика (см. рис. 2.1, а). Этот магнитный поток индуцирует в первичной обмотке ЭДС самоиндукции e_{L1} (на рисунке не показана) и во вторичной обмотке — ЭДС взаимной индукции e_{M2} (на рисунке не показана). После замыкания цепи вторичной обмотки под действием ЭДС взаимной индукции e_{M2} в приемнике с сопротивлением нагрузки r_2 возникнет ток i_2 .

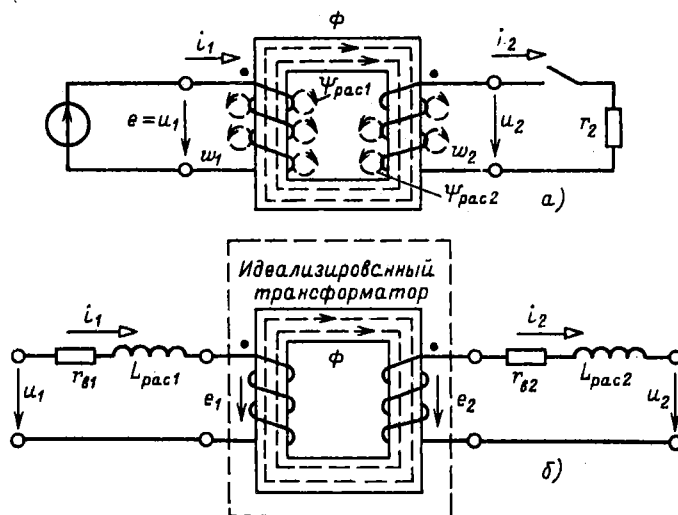


Рис. 9.4

Для указанных на рис. 9.4 направлений навивки первичной и вторичной обмоток и выбранных положительных направлений токов i_1 и i_2 ЭДС $i_2 w_2$ возбуждает в магнитопроводе поток, направленный навстречу магнитному потоку от действия МДС $i_1 w_1$. Следовательно, первичная и вторичная обмотки рассматриваемого трансформатора включены встречно, что условно обозначается разметкой выводов обмоток, как рис. 2.50, в. Поэтому суммарная МДС первичной и вторичной обмоток равна $i_1 w_1 - i_2 w_2$. Эта МДС возбуждает в магнитопроводе общий магнитный поток Φ . Кроме того, при анализе работы трансформатора нужно учесть потокоцепления рассеяния первичной Ψ_{pac1} и вторичной Ψ_{pac2} обмоток, которые пропорциональны соответственно токам i_1 и i_2 .

На рис. 9.4, б показана схема замещения трансформатора с активными сопротивлениями первичной $r_{в1}$ и вторичной $r_{в2}$ обмоток и их индуктивностями рассеяния $L_{\text{pac1}} = \Psi_{\text{pac1}}/i_1$ и $L_{\text{pac2}} = \Psi_{\text{pac2}}/i_2$ (подобно рис. 8.2).

Трансформатор, первичная и вторичная обмотки которого не имеют активных сопротивлений и потокоцеплений рассеяния, называется *идеализированным трансформатором*. На рис. 9.4, б идеализированный трансформатор выделен штриховой линией.

Положительные направления ЭДС e_1 и тока i_1 в его первичной обмотке совпадают, как и у катушки с магнитопроводом (рис. 8.2), в которую превращается трансформатор при разомкнутой цепи вторичной обмотки.

Так как ЭДС в первичной $e_1 = -w_1 d\Phi/dt$ и вторичной $e_2 = -w_2 d\Phi/dt$ обмотках трансформатора индуцируются одним и тем же магнитным потоком Φ в магнитопроводе, то положительные направления этих ЭДС относительно одноименных выводов обеих обмоток одинаковые.

Если в цепи первичной обмотки ЭДС e_1 и ток i_1 совпадают по направлению (правило правоходового буравчика для тока, потока и ЭДС), то в цепи вторичной обмотки направление тока i_2 выбрано противоположным направлению ЭДС e_2 . Это способствует физическому представлению о различной роли ЭДС: в первом случае ЭДС препятствует изменению тока, а во втором возбуждает ток.

9.3. УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО ОДНОФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

Рассмотрим сначала идеализированный однофазный трансформатор с магнитопроводом, выполненным из ферромагнитного материала с линейной зависимостью индукции от напряженности магнитного поля $B = \mu_r \mu_0 H$ (см. рис. 7.6, в).

В § 7.3 отмечалось, что магнитное поле в магнитопроводе с площадью поперечного сечения S неоднородное. Для упрощения расчетов не

будем учитывать неоднородность поля и примем, что индукция и напряженность определяются их значениями на средней магнитной линии длиной $l_{\text{ср}}$.

Электрическая цепь трансформатора с таким магнитопроводом линейная. Следовательно, для ее анализа можно пользоваться комплексным методом.

На рис. 9.5 приведена схема включения идеализированного однофазного трансформатора между источником ЭДС $\dot{E}$ и приемником с комплексным сопротивлением нагрузки $\underline{Z}_2 = z_2 L \varphi_2$.

Запишем значения ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, индуцируемых в первичной и вторичной обмотках идеализированного трансформатора магнитным потоком $\dot{\Phi}$ в магнитопроводе. По закону электромагнитной индукции в комплексной форме [см. (2.33)]

$$\dot{E}_1 = -j\omega w_1 \dot{\Phi} = -j\omega w_1 \dot{B}S = -j\omega w_1 \mu_r \mu_0 \dot{H}S; \quad (9.1a)$$

$$\dot{E}_2 = -j\omega w_2 \dot{\Phi} = -j\omega w_2 \dot{B}S = -j\omega w_2 \mu_r \mu_0 \dot{H}S, \quad (9.1b)$$

где $\dot{B}$ и $\dot{H}$ — комплексные значения индукции и напряженности магнитного поля.

При комплексных токах в первичной и вторичной обмотках идеализированного однофазного трансформатора $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ напряженность магнитного поля на средней линии магнитопровода по (7.2)

$$\dot{H} = \dot{I}_1 w_1 / l_{\text{ср}} - \dot{I}_2 w_2 / l_{\text{ср}}. \quad (9.2)$$

По определению ЭДС источника $\dot{E} = \dot{U}_1$, а ЭДС в обмотках идеализированного трансформатора по второму закону Кирхгофа для контуров, отмеченных на рис. 9.5 штриховой линией, $\dot{E}_1 = -\dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = -\dot{U}_2$. Поэтому с учетом (9.1) и (9.2)

$$\dot{U}_1 = j\omega w_1 \dot{\Phi} = j\omega w_1 \mu_r \mu_0 S (\dot{I}_1 w_1 / l_{\text{ср}} - \dot{I}_2 w_2 / l_{\text{ср}}); \quad (9.3a)$$

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = j\omega w_2 \dot{\Phi}. \quad (9.3b)$$

В частности, в режиме холостого хода трансформатора (цепь вторичной обмотки разомкнута и ток $\dot{I}_2 = 0$)

$$\dot{U}_1 = j\omega w_1 \mu_r \mu_0 S (\dot{I}_{1x} w_1 / l_{\text{ср}}), \quad (9.3в)$$

где $\dot{I}_{1x}$ — ток холостого хода, или намагничивающий ток.

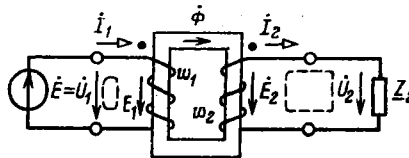


Рис. 9.5

Так как ЭДС источника $\dot{E} = \dot{U}_1$ является заданной величиной, то по (9.3а) и (9.3в)

$$\dot{I}_1 w_1 / l_{cp} - \dot{I}_2 w_2 / l_{cp} = \dot{I}_{1x} w_1 / l_{cp} = \text{const.} \quad (9.4)$$

Поделив почленно (9.3б) на (9.3а), получим

$$U_2 / U_1 = w_2 / w_1 = n_{21} \quad (9.5)$$

— коэффициент трансформации идеализированного однофазного трансформатора, а подставив комплексное значение магнитного потока Φ в магнитопроводе из (9.3б) в (9.3а), получим

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_2 \frac{w_1}{w_2} \dot{I}_2. \quad (9.6)$$

Преобразуем выражение (9.6), умножив и разделив его правую часть на w_1 / w_2

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \frac{w_2}{w_1} \dot{I}_2 = \underline{Z}_2' \dot{I}_2', \quad (9.7)$$

где

$$\underline{Z}_2' = \underline{Z}_2 (w_1 / w_2)^2 = \underline{Z}_2 / n_{21}^2 \quad (9.8)$$

— комплексное сопротивление вторичной цепи, приведенное к первичной, или *приведенное сопротивление*;

$$\dot{I}_2' = \frac{w_2}{w_1} \dot{I}_2 = n_{21} \dot{I}_2 \quad (9.9)$$

— комплексный ток вторичной цепи, приведенный к первичной цепи, или *приведенный ток*.

Пользуясь понятиями приведенных тока и сопротивления, представим уравнения (9.4) и (9.3) в следующей форме:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2' = \dot{I}_{1x}; \quad (9.10а)$$

$$\dot{U}_1 = j \frac{\omega w_1^2 \mu_r \mu_0 S}{l_{cp}} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2') = j \omega L_1 \dot{I}_{1x} = j x_{L1} \dot{I}_{1x}; \quad (9.10б)$$

$$\dot{U}_2' = \frac{w_1}{w_2} \dot{U}_2 = \dot{U}_2 / n_{21} = \underline{Z}_2' \dot{I}_2', \quad (9.10в)$$

где $w_1^2 \mu_r \mu_0 S / l_{cp} = L_1$ — индуктивность первичной обмотки идеализированного однофазного трансформатора; $\dot{U}_2'$ — комплексное напряжение вторичной цепи идеализированного однофазного трансформатора, приведенное к первичной цепи, или *приведенное напряжение*.

Уравнениям (9.10) соответствует схема замещения цепи, изображенная на рис. 9.6, на которой схема замещения идеализированного трансформатора обведена штриховой линией.

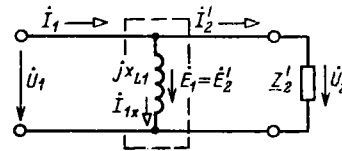


Рис. 9.6

Если относительная проницаемость материала магнитопровода $\mu_r \rightarrow$

$\rightarrow \infty$, то индуктивное сопротивление x_{L1} становится бесконечно большим, а ток намагничивания $I_{1x} = 0$. Идеализированный трансформатор с таким магнитопроводом называется *идеальным*. При помощи такого трансформатора можно реализовать передачу приемнику максимальной энергии. Действительно, если приемник в цепи на рис. 1.26 подключен через идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации $n_{21} = \sqrt{r/r_{II}}$, то условие (1.41) преобразуется в условие $r'_{II} = r$, которое будет выполняться при любых значениях сопротивлений r и r_{II} .

При разомкнутой вторичной цепи идеализированный однофазный трансформатор превращается в идеализированную катушку с магнитопроводом. Следовательно, схема замещения ненагруженного идеализированного однофазного трансформатора совпадает со схемой замещения идеализированной катушки (рис. 8.2), если у катушки и первичной обмотки однофазного трансформатора одинаковые числа витков и магнитопроводы катушки и трансформатора одинаковые.

9.4. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ И ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО ОДНОФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

Рассмотрим теперь идеализированный однофазный трансформатор с магнитопроводом, выполненным из ферромагнитного материала, у которого нужно учитывать гистерезис (см. рис. 7.6, б).

При разомкнутой вторичной цепи схема замещения такого идеализированного однофазного трансформатора совпадает со схемой замещения идеализированной катушки, обведенной на рис. 8.7, б штриховой линией. Активная g и индуктивная b_L проводимости идеализированной катушки определяются (см. § 8.3) после замены статической петли гистерезиса магнитопровода эквивалентным эллипсом (см. рис. 8.6). Схема замещения нагруженного идеализированного однофазного трансформатора приведена на рис. 9.7 и обведена штриховой линией, а приведенная вторичная цепь та же, что и у рассмотренной выше упрощенной схемы замещения идеализированного однофазного трансформатора (см. рис. 9.6).

Параметры элементов схемы замещения g и b_L идеализированного трансформатора при учете динамической петли гистерезиса магнито-

провода зависят от частоты тока. Действительно, площадь динамической петли гистерезиса магнитопровода зависит от частоты намагничивающего тока (см. § 8.4). Следовательно, и параметры эквивалентного эллипса, определяющие параметры схемы замещения идеализированного однофазного трансформатора, также зависят от частоты намагничивающего тока.

На рис. 9.8 приведена векторная диаграмма идеализированного однофазного нагруженного трансформатора. Начальная фаза, равная нулю, выбрана у вектора магнитного потока $\dot{\Phi}$ в магнитопроводе. Вектор тока намагничивания $\dot{I}_{1x}$ опережает вектор магнитного потока $\dot{\Phi}$ на угол потерь δ так же, как и вектор тока $\dot{I}$ на векторной диаграмме катушки (рис. 8.8). Векторы ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, индуцируемых в первичной и вторичной обмотках идеализированного трансформатора, как следует из (9.1), отстают по фазе от вектора магнитного потока на угол $\pi/2$. Длины векторов напряжений между выводами первичной

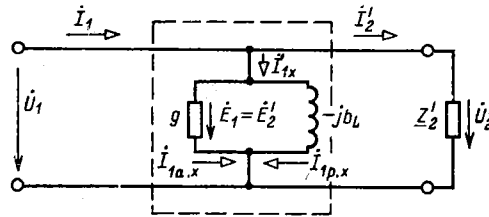


Рис. 9.7

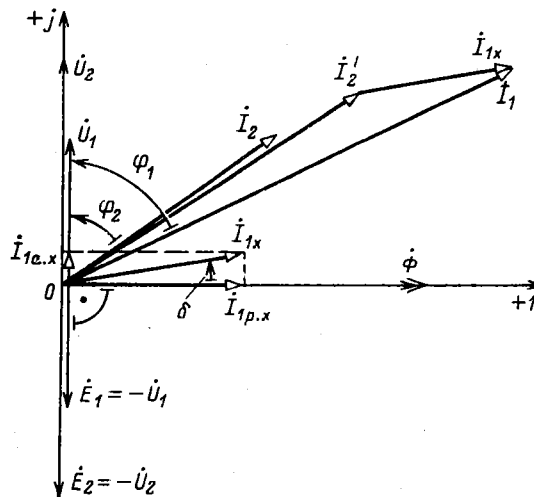


Рис. 9.8

обмотки $\dot{U}_1$ и вторичной обмотки $\dot{U}_2$ равны соответственно длинам векторов ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, но, как следует из (9.3), векторы напряжений опережают по фазе вектор $\dot{\Phi}$ на угол $\pi/2$.

При заданном комплексном сопротивлении нагрузки идеализированного трансформатора $\underline{Z}_2 = z_2 \angle \varphi_2$ по закону Ома определяется ток во вторичной обмотке $\dot{I}_2 = U_2/Z_2$ (на диаграмме построен ток $\dot{I}_2$ при $\varphi_2 > 0$, т. е. при индуктивном характере нагрузки) и ток в первичной обмотке $\dot{I}_1 = \dot{I}_2' + \dot{I}_{1x} = (w_2/w_1) \dot{I}_2 + \dot{I}_{1x}$.

9.5. УРАВНЕНИЯ, СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ И ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА РЕАЛЬНОГО ОДНОФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

Составим теперь схему замещения реального однофазного трансформатора (рис. 9.4, б), в который идеализированный однофазный трансформатор входит как составная часть.

Схема замещения реального однофазного трансформатора показана на рис. 9.9, где $x_{pac1} = \omega L_{pac1}$ и $r_{в1}$ — индуктивное сопротивление рассеяния и активное сопротивление витков первичной обмотки; $x'_{pac2} = \omega L'_{pac2} = \omega L_{pac2} (w_1/w_2)^2$ и $r'_{в2} = r_{в2} (w_1/w_2)^2$ — приведенные индуктивное сопротивление рассеяния и активное сопротивление витков вторичной обмотки. Схема замещения идеализированного однофазного трансформатора выделена на рис. 9.9 штриховой линией.

Схеме замещения реального однофазного трансформатора соответствуют уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + r_{в1} \dot{I}_1 + jx_{pac1} \dot{I}_1 = -\dot{E}_1 + \underline{Z}_{об1} \dot{I}_1; \quad (9.11a)$$

$$\dot{U}_2 = -\dot{E}_2 - r_{в2} \dot{I}_2 - jx_{pac2} \dot{I}_2 = -\dot{E}_2 - \underline{Z}_{об2} \dot{I}_2, \quad (9.11б)$$

где $\underline{Z}_{об1} = r_{в1} + jx_{pac1}$ и $\underline{Z}_{об2} = r_{в2} + jx_{pac2}$ — комплексные сопротивления, учитывающие активное сопротивление обмоток и индуктивности рассеяния.

На рис. 9.10 приведена векторная диаграмма реального однофазного трансформатора. Ее построение аналогично построению диаграммы идеализированного трансформатора (рис. 9.8).

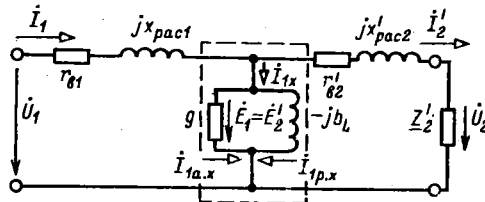


Рис. 9.9

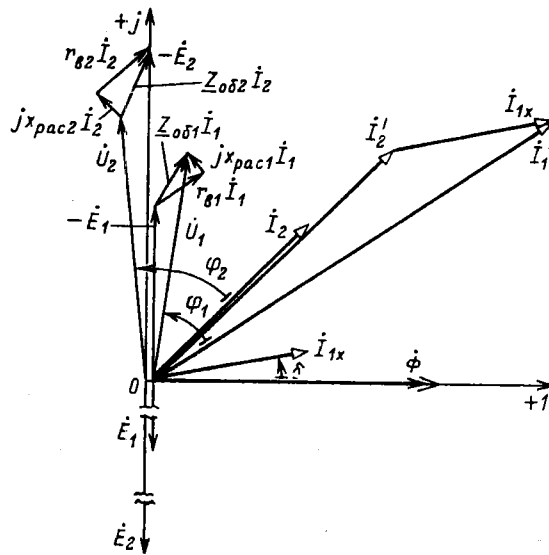


Рис. 9.10

Из уравнений реального однофазного трансформатора и его векторной диаграммы следует, что отношение действующих значений напряжений между выводами вторичной обмотки и между выводами первичной обмотки не совпадает с отношением действующих значений ЭДС, индуцированных в этих обмотках магнитным потоком Φ в магнитопроводе. Действующие значения напряжений $z_{\sigma 1} I_1$ и $z_{\sigma 2} I_2$ называются *полными внутренними падениями напряжений* на первичной и вторичной обмотках трансформатора. Следует иметь в виду, что приведенная векторная диаграмма правильно показывает лишь качественные соотношения между величинами. Практически в большинстве случаев треугольники внутреннего падения напряжения малы, т. е. $U_1 \approx E_1$ и $U_2 \approx E_2$, и можно считать, что

$$U_2/U_1 \approx E_2/E_1 = \frac{w_2}{w_1} = n_{21}. \quad (9.12)$$

Следует также отметить, что намагничивающий ток в реальном трансформаторе зависит от его нагрузки, т. е. от тока $\dot{I}_2$. Это объясняется тем, что при изменении нагрузки изменяются ток в первичной обмотке и ее полное внутреннее падение напряжения $z_{\sigma 1} I_1$. Однако в большинстве случаев падение напряжения $z_{\sigma 1} I_1$ много меньше напряжения питающей сети U_1 и можно считать, что намагничивающий ток равен току холостого хода трансформатора $\dot{I}_{1x}$ при $\dot{I}_2 = 0$.

Различают несколько режимов работы трансформатора, имеющего номинальную полную мощность $S_{\text{ном}} = S_{1\text{ном}} = U_{1\text{ном}} I_{1\text{ном}}$:

1) *номинальный режим*, т. е. режим при номинальных значениях напряжения $U_1 = U_{1\text{ном}}$ и тока $I_1 = I_{1\text{ном}}$ первичной обмотки трансформатора;

2) *рабочий режим*, при котором напряжение первичной обмотки близко к номинальному значению или равно ему: $U_1 \approx U_{1\text{ном}}$, а ток I_1 меньше своего номинального значения $I_{1\text{ном}}$ или равен ему и определяется нагрузкой трансформатора, т. е. током I_2 ;

3) *режим холостого хода*, т. е. режим ненагруженного трансформатора, при котором цепь вторичной обмотки разомкнута ($I_2 = 0$) или подключена к приемнику с очень большим сопротивлением нагрузки (например, к вольтметру);

4) *режим короткого замыкания* трансформатора, при котором его вторичная обмотка коротко замкнута ($U_2 = 0$) или подключена к приемнику с очень малым сопротивлением нагрузки (например, к амперметру).

Режимы холостого хода и короткого замыкания специально создаются при испытании трансформатора.

9.6. РЕЖИМ ХОЛОСТОГО ХОДА ТРАНСФОРМАТОРА

В режиме холостого хода (рис. 9.11) трансформатор по существу превращается в катушку с магнитопроводом, к обмотке которой с числом витков w_1 подключен источник синусоидального напряжения. Поэтому векторная диаграмма трансформатора при холостом ходе (рис. 9.12) подобна векторной диаграмме катушки с магнитопроводом (рис. 8.8), а отличается от последней лишь некоторыми обозначениями и дополнительно построенным вектором ЭДС вторичной обмотки E_{2x} .

Опыт холостого хода называется испытание трансформатора при разомкнутой цепи вторичной обмотки и номинальном первичном напряжении $U_{1x} = U_{1\text{ном}}$. На основании этого опыта по показаниям измерительных приборов определяют коэффициент трансформации и мощность потерь в магнитопроводе трансформатора. Опыт холостого хода является одним из двух обязательных контрольных опытов при заводском испытании готового трансформатора.

При номинальном первичном напряжении $U_{1x} = U_{1\text{ном}}$ ток холостого хода I_{1x} составляет 3–10% номинального первичного тока $I_{1\text{ном}}$ (тем меньше, чем больше номинальная полная мощность трансформатора), т. е. по (9.11а) $U_{1x} \approx E_{1x}$. Кроме того, при разомкнутой цепи вторичной обмотки всегда $U_{2x} = E_{2x}$. Поэтому, измерив вольтметром и первичное U_{1x} , и вторичное U_{2x} напряжения в режиме холостого хо-

дз, определяют коэффициент трансформации:

$$n_{21} = w_2/w_1 = E_{2x}/E_{1x} = U_{2x}/U_{1x}. \quad (9.13)$$

Этот коэффициент указывается на щитках трансформаторов в виде отношения номинальных напряжений трансформатора при холостом ходе, например "6000/230 В" (как отношение высшего напряжения к низшему).

Мощность потерь в трансформаторах при холостом ходе складывается из мощности потерь в магнитопроводе и мощности потерь в проводах первичной обмотки ($r_1 I_{1x}^2$).

При холостом ходе ток $I_{1x} \ll I_{1\text{ном}}$ и мощность потерь в проводах ничтожна по сравнению с мощностью потерь в магнитопроводе (исключения составляют лишь трансформаторы, номинальная полная мощность которых меньше 1000 В · А). Поэтому опыт холостого хода служит также для определения *мощности потерь в магнитопроводе трансформатора*.

Мощность потерь в трансформаторе при холостом ходе мала. При номинальной полной мощности трансформаторов 5–50 кВ · А его мощность потерь в режиме холостого хода составляет лишь 1,4–0,9% номинальной, а при номинальной полной мощности 1–10 МВ · А — только 0,5–0,3%. Тем не менее мощность потерь в магнитопроводе имеет важное практическое значение, так как силовые трансформаторы отключаются от первичной сети довольно редко.

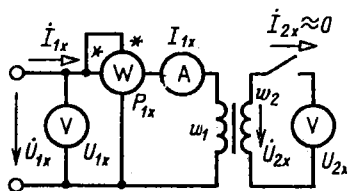


Рис. 9.11

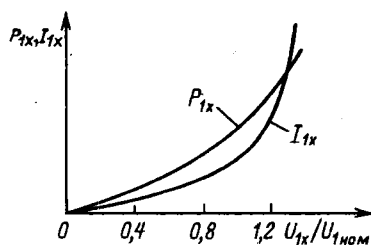


Рис. 9.13

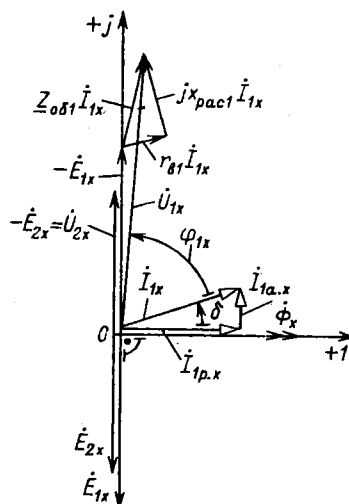


Рис. 9.12

Ток холостого хода I_{1x} , как и ток катушки с магнитопроводом, состоит из реактивной $I_{1p,x}$ и активной $I_{1a,x}$ составляющих. Последняя определяется потерями в магнитопроводе на гистерезис и вихревые токи, а также добавочными потерями*.

Полезно иметь в виду, что в большинстве случаев активная составляющая $I_{1a,x}$ меньше $0,1I_{1p,x}$, и поэтому можно считать, что ток холостого хода отстает по фазе от первичного напряжения практически на четверть периода, т. е. $\varphi_{1x} \approx \pi/2$ (рис. 9.12).

Опыт холостого хода при номинальном первичном напряжении $U_{1x} = U_{1ном}$ является основным при испытании трансформатора. Однако в ряде случаев, например при ограниченных возможностях охлаждения, важно знать, как изменится режим холостого хода трансформатора при изменении первичного напряжения. Зависимости $P_{1x} = f(U_{1x})$ и $I_{1x} = F(U_{1x})$ называются *характеристиками холостого хода* трансформатора (рис. 9.13). При постепенном, начиная с нуля, повышении первичного напряжения U_{1x} сначала, пока магнитопровод не насыщен, ток I_{1x} увеличивается пропорционально напряжению; затем начнет сказываться насыщение магнитопровода (например при $U_{1x} > 0,8U_{1ном}$) и ток холостого хода I_{1x} быстро нарастает.

Мощность потерь в магнитопроводе пропорциональна B^2 [см. (8.11) и (8.12)], следовательно, и Φ^2 , а так как действующее значение ЭДС E_{1x} пропорционально $\Phi = \Phi_m/\sqrt{2}$ [см. (9.1a)] и $E_{1x} \approx U_{1x}$, то P_{1x} пропорциональна U_{1x}^2 .

Для большинства трансформаторов допустимый верхний предел длительного повышения напряжения при холостом ходе U_{1x} равен $1,1U_{1ном}$, что следует иметь в виду при экспериментах с трансформаторами.

9.7. РЕЖИМ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ ТРАНСФОРМАТОРА

Следует различать режим короткого замыкания в эксплуатационных условиях и опыт короткого замыкания. Первый представляет собой аварийный режим трансформатора, так как трансформатор сильно нагревается и перегрев может вызвать его разрушение.

Опыт короткого замыкания называется испытание трансформатора при короткозамкнутой цепи вторичной обмотки и номинальном первичном токе $I_{1к} = I_{1ном}$. Этот опыт (рис. 9.14) служит для опре-

* Добавочные потери — это потери из-за вибрации листов стали в местах их стыков и расположения шпилек вследствие неравномерного распределения индукции, потери в конструктивных деталях, зависящие от потока рассеяния, и т. д. Все добавочные потери составляют 15–20% основных потерь в магнитопроводе.

деления важнейших параметров трансформаторов: мощности потерь в проводах, внутреннего падения напряжения и т. п. Опыт короткого замыкания, как и опыт холостого хода, обязателен при заводских испытаниях. В режиме короткого замыкания ($U_2 = 0$) ЭДС $E_{2к}$, индуцируемая во вторичной обмотке, как следует из второго закона Кирхгофа (9.11б), равна сумме напряжений на активном сопротивлении и индуктивном сопротивлении рассеяния вторичной обмотки:

$$\dot{E}_{2к} = -(r_{в2} + jx_{рас2})\dot{I}_{2к},$$

в то время как в рабочем режиме

$$\dot{E}_2 = -(\dot{U}_2 + r_{в2}\dot{I}_2 + jx_{рас2}\dot{I}_2).$$

Напряжение первичной обмотки в опыте короткого замыкания $U_{1к}$ при токе $I_{1к} = I_{ном}$ равно примерно 5–10% номинального $U_{1ном}$. Поэтому действующее значение ЭДС E_2 составляет лишь несколько процентов (2–5%) действующего значения ЭДС E_2 в рабочем режиме. Пропорционально значению ЭДС уменьшается магнитный поток в магнитопроводе [см. (9.1б)], а вместе с ним намагничивающий ток и мощность потерь в магнитопроводе, пропорциональная Φ^2 . Следовательно, можно считать, что при опыте короткого замыкания вся мощность $P_{1к}$ трансформатора равна мощности потерь в проводах первичной и вторичной обмоток:

$$P_{1к} = r_{в1}I_{1к}^2 + r_{в2}I_{2к}^2 = r_{в1}I_{1к}^2 + r'_{в2}I_{2к}'^2.$$

Так как намагничивающим током $I_{1х}$ ввиду его относительной малости можно пренебречь, то согласно (9.10а) $I_{1к} = I_{2к}'$ и

$$P_{1к} = (r_{в1} + r'_{в2})I_{1к}^2 = r_{к}I_{1к}^2. \quad (9.14)$$

С увеличением номинальной полной мощности $S_{ном}$ трансформатора активная мощность $P_{1к}$ в опыте короткого замыкания относительно убывает. При $S_{ном} = 5 \div 20$ кВ · А отношение $P_{1к}/S_{ном}$ равно 3,7–3%, а при $S_{ном} = 320 \div 5600$ кВ · А это отношение равно 2–1%.

По мощности потерь в трансформаторе при коротком замыкании вторичной обмотки $P_{1к}$ и номинальном значении первичного тока $I_{1к} = I_{1ном}$ на основании (9.14) определяется *активное сопротивление короткого замыкания* трансформатора:

$$r_{к} = P_{1к}/I_{1к}^2. \quad (9.15)$$

Чтобы обеспечить минимальные размеры трансформатора, конструкторы выбирают такие плотность тока в проводах и индукцию в магни-

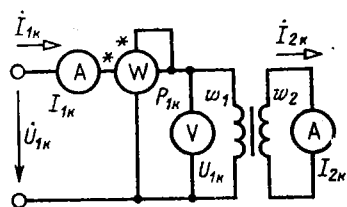


Рис. 9.14

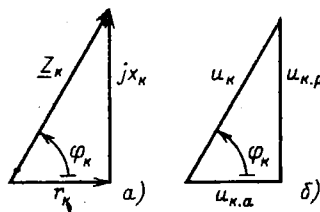


Рис. 9.15

топроводе, которые соответствуют почти предельно допустимой температуре нагревания при работе трансформатора. По этой причине для определения мощности потерь в обмотках нагруженного трансформатора значение r_k , найденное из опыта короткого замыкания, должно быть соответственно пересчитано (приведено к температуре 75°C) (см. табл. 1.1).

Индуктивное сопротивление короткого замыкания можно считать не зависящим от температуры. Поэтому оно определяется непосредственно из результатов опыта:

$$x_k = \sqrt{z_k^2 - r_k^2} = \sqrt{(U_{1к}/I_{1к})^2 - r_k^2}. \quad (9.16)$$

Таким образом, полное сопротивление короткого замыкания, приведенное к рабочей температуре 75°C ,

$$z_k = \sqrt{r_{k75}^2 + x_k^2}. \quad (9.17)$$

На рис. 9.15, а и б построены треугольник сопротивлений и подобный ему имеющий важное практическое значение *основной треугольник короткого замыкания*, катеты которого представляют в процентах номинального напряжения $U_{1ном}$ активную и индуктивную составляющие первичного напряжения в опыте короткого замыкания $U_{1к}$. Эти составляющие определяются при номинальном токе в первичной обмотке $I_{1к} = I_{1ном}$, т. е. катеты

$$u_{к,а} = \frac{r_k I_{1ном}}{U_{1ном}} 100\%;$$

$$u_{к,р} = \frac{x_k I_{1ном}}{U_{1ном}} 100\%.$$

и гипотенуза

$$u_k = \frac{z_k I_{1ном}}{U_{1ном}} 100\%.$$

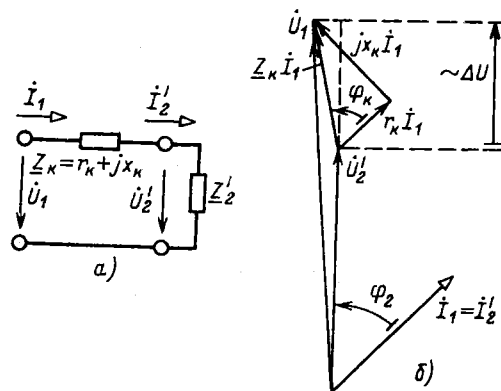


Рис. 9.16

Напряжение короткого замыкания u_k является важным параметром трансформатора, на основании которого определяются изменения вторичного напряжения нагруженного трансформатора (см. § 9.8). Напряжение короткого замыкания указывается на шитке трансформатора.

Чем выше номинальные напряжения обмоток трансформатора, тем больше напряжение u_k , так как с увеличением толщины изоляции проводов возрастают потокоцепления рассеяния, а следовательно, и индуктивные сопротивления рассеяния $x_{рас1}$ и $x_{рас2}$. При номинальной полной мощности $S_{ном} = 5000 \div 5600$ кВ · А и номинальном высшем напряжении 6,3 и 10 кВ напряжение $u_k = 5,5\%$, а при номинальной мощности 3200–4200 кВ · А и номинальном высшем напряжении 35 кВ напряжение $u_k = 7\%$.

Опыт короткого замыкания может служить также контрольным опытом для определения коэффициента трансформации. При коротком замыкании в уравнении (9.4) составляющая $I_{1x}w_1$ ничтожно мала по сравнению с двумя другими составляющими и ею можно пренебречь, следовательно,

$$w_1 I_{1к} \approx w_2 I_{2к} \quad (9.18)$$

и коэффициент трансформации

$$n_{21} = w_2/w_1 \approx I_{1к}/I_{2к}. \quad (9.19)$$

Пренебрегая током холостого хода трансформатора $I_{1х}$ и определив параметры трансформатора r_k и x_k из опыта короткого замыкания, составим (рис. 9.16, а) упрощенную эквивалентную схему замещения трансформатора, для которой на рис. 9.16, б построена векторная диаграмма.

9.8. ВНЕШНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАНСФОРМАТОРА

Рассмотрим режим работы трансформатора при различных значениях комплексного сопротивления нагрузки $Z_2 = z_2 \angle \varphi_2$. Если напряжение между выводами первичной обмотки трансформатора постоянно и равно номинальному значению $U_1 = U_{\text{ном}}$, то при изменении комплексного сопротивления нагрузки изменяются токи в обмотках трансформатора I_1 и I_2 и вторичное напряжение U_2 .

Чтобы определить изменение вторичного напряжения, его обычно приводят к числу витков первичной обмотки. *Изменением напряжения* называется разность действующих значений приведенного вторичного напряжения $U_2' = (w_1/w_2)U_2$ при холостом ходе и при заданном комплексном сопротивлении нагрузки. Первое из них практически равно $U_{\text{ном}}$. Следовательно, изменение напряжения равно $U_{\text{ном}} - U_2'$. Оно выражается обыкновенно в процентах номинального первичного напряжения и называется *процентным изменением напряжения трансформатора*:

$$\Delta U\% = \frac{U_{\text{ном}} - U_2'}{U_{\text{ном}}} 100\%. \quad (9.20)$$

Из упрощенной эквивалентной схемы замещения трансформатора (рис. 9.16, а) и его векторной диаграммы (рис. 9.16, б) следует, что изменение напряжения трансформатора

$$U_{\text{ном}} - U_2' \approx (r_k \cos \varphi_2 + x_k \sin \varphi_2) I_1,$$

или по (9.20)

$$\Delta U\% = \frac{I_1}{U_{\text{ном}}} (r_k \cos \varphi_2 + x_k \sin \varphi_2) \cdot 100\%. \quad (9.21)$$

По (9.21) на рис. 9.17, а построена зависимость изменения напряжения от коэффициента мощности нагрузки $\cos \varphi_2$ при $I_1 = \text{const}$. Наибольшее значение $\Delta U\%$ соответствует условию $\cos \varphi_2 = \cos \varphi_k$, при выполнении которого вектор внутреннего падения напряжения $Z_k I_1$ совпадает по направлению с вектором первичного напряжения U_1 (рис. 9.16, б, вертикальная штриховая линия), вследствие чего

$$U_2' = U_1 - z_k I_1.$$

Внешняя характеристика трансформатора определяет зависимость изменения вторичного напряжения U_2 от тока нагрузки $I_2 = I_1/n_{21}$ при постоянном коэффициенте мощности приемника $\varphi_2 = \text{const}$ и номинальном первичном напряжении $U_1 = U_{\text{ном}}$. Часто для определения внешней характеристики пользуются относительными единицами, т. е.

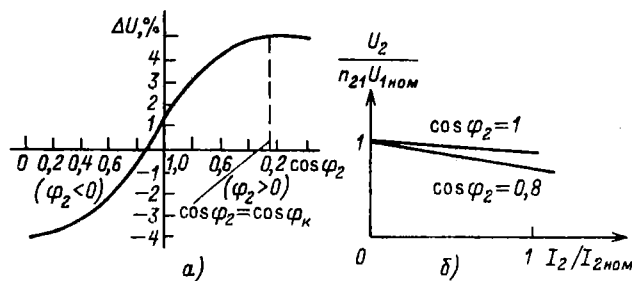


Рис. 9.17

отношением вторичного напряжения к его номинальному значению $U_{2ном} = n_{21} U_{1ном}$, и коэффициентом загрузки трансформатора

$$k_3 = I_2 / I_{2ном}, \quad (9.22)$$

где $I_{2ном}$ — ток нагрузки при номинальном первичном токе $I_1 = I_{1ном}$. С учетом (9.20) и (9.21) внешняя характеристика трансформатора в относительных единицах выражается зависимостью

$$\frac{U_2}{n_{21} U_{1ном}} = \left(1 - \frac{\Delta U \%}{100} \right) = 1 - k_3 \frac{I_{1ном}}{U_{1ном}} (r_k \cos \varphi_2 + x_k \sin \varphi_2),$$

которая при $\varphi_2 > 0$ представлена на рис. 9.17, б для двух значений $\cos \varphi_2$.

9.9. МОЩНОСТЬ ПОТЕРЬ В ТРАНСФОРМАТОРЕ

На рис. 9.18 показана энергетическая диаграмма трансформатора. Здесь P_1 — мощность первичной обмотки; $P_{пр1}$ — мощность потерь на нагревание проводов первичной обмотки; P_c — мощность потерь в магнитопроводе (в стали) на гистерезис и вихревые токи; разность $P_1 - P_{пр1} - P_c = P_{12}$ — мощность во вторичной обмотке; часть мощности P_{12} составляет мощность потерь на нагревание проводов $P_{пр2}$, а оставшаяся часть P_2 равна мощности цепи, которая питается от трансформатора: $P_2 = P_{12} - P_{пр2} = P_1 - P_{пр1} - P_c - P_{пр2}$.

Отношение активной мощности P_2 на выходе трансформатора к активной мощности P_1 на входе

$$\eta = P_2 / P_1, \quad \text{или} \quad \eta \% = (P_2 / P_1) \cdot 100\%, \quad (9.23)$$

называется КПД трансформатора. В общем случае КПД трансформатора зависит от режима работы.

При номинальных значениях напряжения $U_1 = U_{\text{ном}}$ и тока $I_1 = I_{\text{ном}}$ первичной обмотки трансформатора и коэффициенте мощности приемника $\cos \varphi_2 > 0,8$ КПД очень высок и у мощных трансформаторов превышает 99%. По этой причине почти не применяется прямое определение КПД трансформатора, т. е. на основании непосредственного измерения мощностей P_1 и P_2 . Для получения удовлетворительных результатов нужно было бы измерять мощности P_1 и P_2 с такой высокой точностью, какую практически получить очень трудно. Но относительно просто можно определить КПД методом косвенного измерения, основанного на прямом измерении мощности потерь в трансформаторе. Так как мощность потерь $\Delta P = P_1 - P_2$, то КПД трансформатора

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + \Delta P} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = 1 - \frac{\Delta P}{P_1} = 1 - \frac{\Delta P}{P_2 + \Delta P} \quad (9.24)$$

Мощность потерь в трансформаторе равна сумме мощностей потерь в магнитопроводе P_c и в проводах обмоток $P_{\text{пр}}$. При номинальных значениях первичных напряжения $U_1 = U_{\text{ном}}$ и тока $I_1 = I_{\text{ном}}$ мощности потерь в магнитопроводе и проводах обмоток практически равны активным мощностям трансформатора в опытах холостого хода (§ 9.6) и короткого замыкания (§ 9.7) соответственно.

Рассмотрим зависимость КПД трансформатора от режима работы при номинальном первичном напряжении $U_1 = U_{\text{ном}}$ в случае приемника с различными полными сопротивлениями z_2 и постоянным коэффициентом мощности $\cos \varphi_2 = \text{const}$. При изменении полного сопротивления приемника изменяются его мощность, токи в обмотках, а следовательно, потери в проводах обмоток и КПД трансформатора.

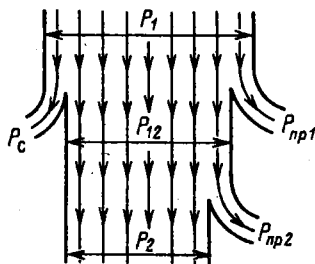


Рис. 9.18

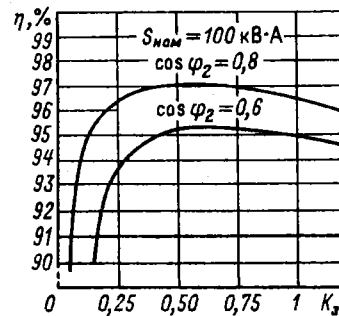


Рис. 9.19

Потери в проводах обмоток называют *переменными потерями трансформатора*, потери в магнитопроводе – *постоянными потерями*.

Мощность потерь в проводах обмоток равна (рис. 9.16, а)

$$r_{\text{к}} (I_2')^2 = k_3^2 r_{\text{к}} (I_{2\text{ном}}')^2 = k_3^2 P_{\text{к.ном}},$$

где k_3 – коэффициент загрузки трансформатора (9.22); $P_{\text{к.ном}}$ – мощность потерь в проводах обмоток при номинальных токах.

При изменении тока вторичной обмотки от нуля до номинального можно считать, что $U_2 \approx \text{const} \approx U_{2\text{ном}} = U_{1\text{ном}} n_{21}$.

Активная мощность на выходе трансформатора

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = k_3 U_2 I_{2\text{ном}} \cos \varphi_2 \approx k_3 S_{\text{ном}} \cos \varphi_2,$$

КПД трансформатора по (9.24)

$$\eta = \left(1 - \frac{\Delta P}{P_2 + \Delta P} \right) \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \left(1 - \frac{k_3^2 P_{\text{к.ном}} + P_{\text{с}}}{k_3 S_{\text{ном}} \cos \varphi_2 + k_3^2 P_{\text{к.ном}} + P_{\text{с}}} \right) \cdot 100\%.$$

Следовательно, КПД трансформатора зависит от значений коэффициента мощности приемника $\cos \varphi_2$ и коэффициента загрузки k_3 . При постоянном значении коэффициента мощности приемника, приравняв нулю производную от η по k_3 , найдем, что КПД трансформатора максимальный при $k_3 = \sqrt{P_{\text{с}} / P_{\text{к.ном}}}$. Следовательно, максимум КПД для максимальной загрузки ($k_3 = 1$) можно получить при равенстве мощностей потерь в магнитопроводе и потерь в проводах.

В действительности при проектировании трансформатора приходится учитывать, что трансформатор значительную часть времени может быть не полностью загружен. По этой причине трансформаторы обычно рассчитывают так, чтобы максимум КПД (рис. 9.19) соответствовал средней нагрузке; например, при отношении мощностей потерь $P_{\text{с}} / P_{\text{к.ном}} = 0,5 \div 0,25$ максимум КПД будет при нагрузке, которой соответствует

$$k_3 = \sqrt{P_{\text{с}} / P_{\text{к.ном}}} = 0,7 \div 0,5.$$

9.10. ОСОБЕННОСТИ ТРЕХФАЗНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Все полученное выше для однофазных трансформаторов можно распространить на каждую фазу трехфазного трансформатора в случае симметричной нагрузки. Рассмотрим особенности устройства и работы трехфазных трансформаторов.

Для трехфазной цепи (гл. 3) можно воспользоваться трансформаторной группой — тремя однофазными трансформаторами (рис. 9.20, а). Но можно объединить три однофазных трансформатора в один трехфазный аппарат и при этом получить экономию материалов. Покажем наглядно, что обуславливает экономию материала при построении трехфазного трансформатора.

Составим магнитопровод трехфазного трансформатора, оставив без изменения те части магнитопроводов трех однофазных трансформаторов, на которых расположены обмотки, и соединив свободные части вместе (рис. 9.20, б). Такое построение магнитной системы можно сопоставить с соединением трех участков электрических цепей звездой (см. рис. 3.4). Но для трехфазной системы при симметричной нагрузке нейтральный провод не нужен, так как тока в нейтральном проводе нет; отказавшись от нейтрального провода, получим экономию меди. Нейтральному проводу в магнитной системе трехфазного трансформатора соответствует средний общий стержень (рис. 9.20, б). При симметричной трехфазной системе этот стержень не нужен и может быть удален (рис. 9.20, в), так как сумма мгновенных значений трех магнитных потоков в любой момент времени равна нулю.

Симметричный магнитопровод (рис. 9.20, в) неудобен для изготовления и обычно заменяется несимметричным магнитопроводом (рис. 9.20, з). У такого трансформатора вследствие неравенства магнитных сопротивлений различных стержней магнитопровода значения намагничивающих токов отдельных фаз не одинаковые. Однако эта несимметрия намагничивающих токов существенного значения не имеет.

Трансформаторная группа из трех однофазных трансформаторов дороже, чем трехфазный трансформатор той же мощности; она занима-

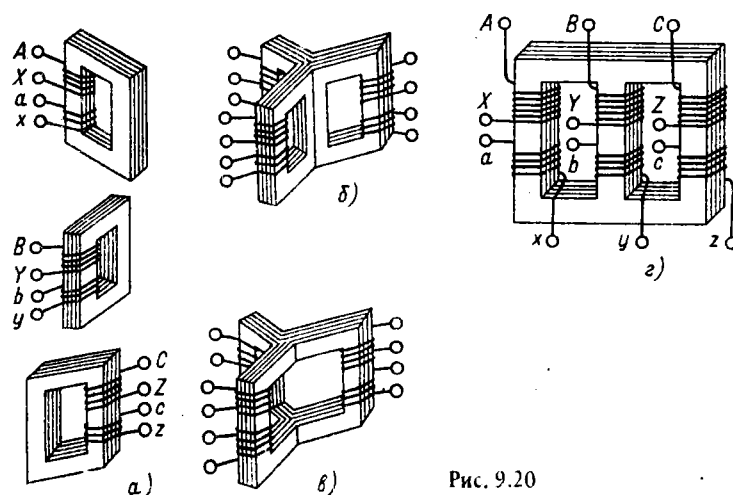


Рис. 9.20

ет больше места, и ее КПД несколько ниже. Но при такой группе в качестве резерва на случай аварии или при ремонте достаточно иметь один однофазный трансформатор, так как маловероятно одновременное повреждение всех трех однофазных трансформаторов, а профилактически ремонтировать их можно поочередно. Для трехфазного трансформатора в качестве резерва необходим тоже трехфазный трансформатор. Таким образом, трехфазная группа при прочих равных условиях обеспечивает большую надежность во время эксплуатации. Наконец, перевозка и установка трех однофазных трансформаторов большой мощности значительно проще перевозки и установки трехфазного трансформатора значительно большей мощности.

Практически большинство трансформаторов малой и средней мощности выполняются трехфазными, а в случае больших мощностей вопрос решается с учетом всех конкретных условий. Согласно ГОСТ трехфазные трансформаторы изготавливаются мощностью до 1 млн. кВт · А, но, начиная с мощности 1800 кВт · А, допускается применение трехфазных групп.

Выводы обмоток трехфазного трансформатора размечаются в порядке чередования фаз: на стороне высшего напряжения выводы A, B, C — начала обмоток, X, Y, Z — их концы; на стороне низшего напряжения начала — a, b, c , концы — x, y, z (рис. 9.20, з).

Обмотки трехфазного трансформатора соединяются звездой или треугольником. Эти два соединения условно обозначаются символами Y и Δ . Соединение обеих обмоток трехфазного трансформатора звездой наиболее простое и дешевое. В этом случае каждая из обмоток и ее изоляция при глухом заземлении нейтральной точки должны быть рассчитаны на фазное напряжение и линейный ток. Так как число витков обмотки трансформатора прямо пропорционально напряжению [см. (8.4в)], то при соединении звездой для каждой из обмоток необходимо меньшее число витков, но большее сечение проводов с изоляцией, рассчитанной лишь на фазное напряжение. Соединение обеих обмоток звездой широко применяется для трансформаторов небольшой и средней мощности (примерно до 1800 кВт · А). Это соединение наиболее желательно при высоких напряжениях, так как при такой схеме изоляция обмоток рассчитывается лишь на фазное напряжение. Чем выше напряжение и меньше ток, тем относительно дороже соединение треугольником.

Соединение обмоток треугольником конструктивно оправдано при больших токах. По этой причине соединение Y/Δ можно считать наиболее распространенным для трансформаторов большой мощности, если на стороне низшего напряжения не нужен нейтральный провод.

Из соотношений в трехфазной системе (см. § 3.2 и 3.3) следует, что у трехфазных трансформаторов только отношение фазных напряжений $U_{1\phi}/U_{2\phi}$ приближенно равно отношению числа витков первичной и вторичной обмоток w_1/w_2 , а отношение линейных напряжений

зависит от вида соединения обмоток. При одинаковом соединении (Y/Y или Δ/Δ) отношение линейных напряжений равно фазному коэффициенту трансформации. Но при различных соединениях (Y/ Δ и Δ/Y) отношение линейных напряжений меньше или больше этого коэффициента в $\sqrt{3}$ раз. Поэтому можно изменить вторичное линейное напряжение трансформатора соответствующим изменением схемы соединения его обмоток.

9.11. ГРУППЫ СОЕДИНЕНИЙ ОБМОТОК ТРАНСФОРМАТОРОВ

При рабочем режиме работы трансформатора фазы первичных и вторичных напряжений u_1, u_2 и токов i_1, i_2 для выбранных на рис. 9.21 положительных направлений практически совпадают. Для выбранных положительных направлений тока i_{II} и напряжения u_{II} приемника следует $i_{II} = i_2, u_{II} = u_2$ или $i_{II} = -i_2; u_{II} = -u_2$, если ключ K находится в положении 1 или 2. В первом случае фазы тока и напряжения приемника и фазы вторичных тока и напряжения трансформатора совпадают, во втором случае фазы противоположны. Эти фазовые соотношения весьма важны при параллельном соединении трансформаторов, применении измерительных трансформаторов и т. д.

Для условного обозначения сдвига фазы вторичного напряжения по отношению к первичному принято деление трансформаторов по группам соединений. При определении группы соединений трансформатора первичным напряжением считается его высшее напряжение, а вторичным — низшее.

Основанием для деления трансформаторов по группам соединений служит значение угла сдвига фаз между линейными высшим и низшим напряжениями. У двух трансформаторов с одинаковой группой соединений этот сдвиг фаз должен быть одинаков.

Обозначение групп соединений основано на сопоставлении относительного положения векторов высшего и низшего линейных напряжений на комплексной плоскости с положением минутной и часовой стрелок. Для сопоставления минутная стрелка считается установленной на цифре 12, и с ней совмещается вектор линейного высшего напряжения, а часовая стрелка совмещается с вектором линейного низшего напряжения. Угол 30° , равный центральному углу между двумя соседними цифрами часового циферблата, служит единицей при отсчете угла сдвига фаз. Отсчет угла производится от минутной к часовой стрелке по направлению их вращения. Группе соединений дается название по положению часовой стрелки.

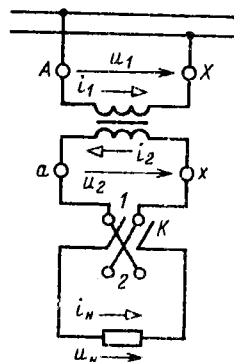


Рис. 9.21

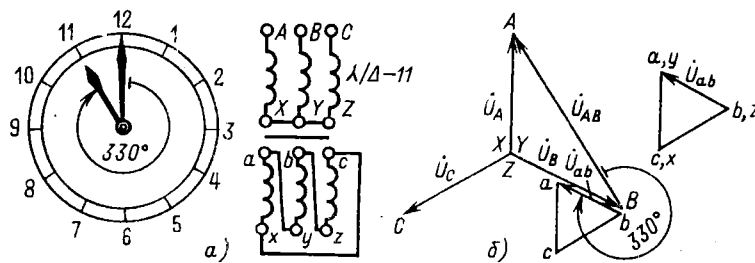


Рис. 9.22

В случае однофазного трансформатора вектор низшего напряжения может составлять с вектором высшего напряжения приблизительно угол или 0° , или 180° . В первом случае это соответствует положению обеих стрелок на цифре 12, поэтому такое соединение именуется группой 0. Во втором случае часовая стрелка должна быть поставлена на 6, т. е. это будет группа 6. В последнем случае первичная и вторичная обмотки намотаны противоположно относительно направления магнитного потока. Согласно ГОСТ для однофазных трансформаторов установлена одна стандартная группа соединений — 0.

У трехфазных трансформаторов возможны все 12 различных групп соединений, но желательно иметь минимальное их число. Поэтому для трехфазных трансформаторов выбраны только две стандартные группы: 11 и 0. Группе 11 соответствуют два вида соединения обмоток: звезда/треугольник ($Y/\Delta-11$) и звезда с выведенной нейтральной точкой/треугольник ($Y_n/\Delta-11$). Группе 0 соответствует один способ соединения обмоток: звезда/звезда с выведенной нейтральной точкой (Y/Y_n-0). В числителе обозначения всегда указывается, как соединены обмотки высшего напряжения.

Группа Y/Y_n-0 применяется для трансформаторов с высшим напряжением до 35 кВ включительно при низшем напряжении 230 В и мощности до 560 кВ · А или при том же пределе высшего напряжения, низшем напряжении 400 В и мощности до 1800 кВ · А.

Оба вида соединения по группе 11 применяются для более мощных трансформаторов и более высоких напряжений. В качестве примера на рис. 9.22, а, б показано, как при соединении Y/Δ вектор низшего (в данном случае вторичного) линейного напряжения $\dot{U}_{ab}$ образует с вектором высшего (первичного) линейного напряжения $\dot{U}_{AB}$ угол 330° , который равен углу между стрелками в 11 часов, следовательно, это соединение относится к группе 11.

В зарубежной практике трансформаторостроения применяются и другие группы соединений.

9.12. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РАБОТА ТРАНСФОРМАТОРОВ

При параллельной работе первичные обмотки трансформаторов получают энергию от общего источника (от общей линии на рис. 9.23), а вторичные обмотки подключаются к общему приемнику (к общей линии на рис. 9.23).

Трансформаторы, включаемые на параллельную работу, должны удовлетворять трем условиям, из которых первое должно быть выполнено безусловно, а второе и третье допускают в известных пределах небольшие отклонения. Эти три условия следующие:

- 1) одна и та же группа соединений (в случае трехфазных трансформаторов 0 или 11);
- 2) одинаковые номинальные первичные и вторичные напряжения; разница значений коэффициентов трансформации не должна превышать 0,5%;
- 3) одинаковые напряжения короткого замыкания (допускается отклонение $\pm 10\%$).

Выполнение первых двух условий предупреждает возникновение больших уравнивающих токов в обмотках трансформаторов при холостном ходе вследствие несовпадения фаз или неравенства вторичных ЭДС.

При параллельном включении двух однофазных трансформаторов для правильного выбора вторичных выводов можно присоединить вольтметр параллельно разомкнутым контактам рубильника (рис. 9.23), который служит для включения второго трансформатора. Если выводы выбраны правильно, то стрелка вольтметра не отклоняется; в противном случае вольтметр показывает удвоенное значение вторичного напряжения трансформаторов.

Если не соблюдено первое условие при параллельном соединении двух трехфазных трансформаторов, то между вторичными линейными напряжениями получается сдвиг фаз, равный 30° . Поэтому в каждом контуре, образуемом двумя фазными обмотками (двух трансформаторов), будет действовать результирующая ЭДС. Так как сопротивление обмоток мало, то эта ЭДС создает в контуре очень большой ток, опасный для обмоток трансформаторов.

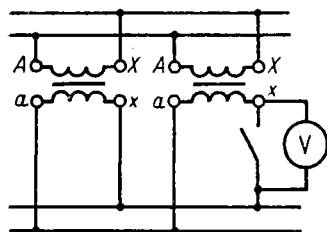


Рис. 9.23

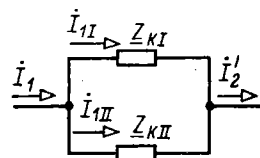


Рис. 9.24

Третье условие должно выполняться для того, чтобы нагрузка распределялась между параллельно работающими трансформаторами пропорционально их номинальным полным мощностям. В упрощенной эквивалентной схеме замещения (см. рис. 9.16, а) трансформатор представлен цепью с комплексным сопротивлением короткого замыкания $\underline{Z}_K$ (см. § 9.7). Два параллельно работающих трансформатора могут быть изображены в общей эквивалентной схеме замещения двумя соединенными параллельно ветвями с комплексными сопротивлениями короткого замыкания $\underline{Z}_{KI}$ и $\underline{Z}_{KII}$ (рис. 9.24). При таком соединении действующие значения токов I_{II} и I_{IPI} обратно пропорциональны полным сопротивлениям параллельных ветвей:

$$I_{KI}/I_{KII} = Z_{KII}/Z_{KI}. \quad (9.25)$$

Напряжение короткого замыкания трансформатора пропорционально произведению номинального первичного тока $I_{Iном}$ трансформатора на его полное сопротивление короткого замыкания z_K . Если эти напряжения у двух трансформаторов равны, то

$$z_{KI} I_{IPIном} = z_{KII} I_{IPIном}.$$

Так как первичные номинальные напряжения ($U_{Iном}$) у трансформаторов при параллельном включении должны быть одинаковы, то при выполнении последнего соотношения получим

$$\frac{z_{KII}}{z_{KI}} = \frac{I_{IPIном}}{I_{IPIном}} = \frac{U_{Iном} I_{IPIном}}{U_{Iном} I_{IPIном}} = \frac{S_{Iном}}{S_{IPIном}}$$

или (9.25)

$$I_{KI}/I_{KII} = z_{KII}/z_{KI} = S_{Iном}/S_{IPIном},$$

т. е. токи распределяются между трансформаторами пропорционально их номинальным полным мощностям. Таким образом, равенство напряжений короткого замыкания обеспечивает распределение нагрузки между трансформаторами пропорционально их номинальной полной мощности.

9.13. ОДНОФАЗНЫЕ И ТРЕХФАЗНЫЕ АВТОТРАНСФОРМАТОРЫ

В ряде случаев при передаче электроэнергии требуется соединить через трансформатор электрические цепи, отношение номинальных напряжений которых не превышает 2, например цепи высокого напряжения 110 и 220 кВ. В подобных случаях экономически целесообразно вместо трансформатора применить автотрансформатор, так как его

КПД выше, а размеры меньше, чем у трансформатора той же номинальной мощности.

Автотрансформатор отличается от трансформатора тем, что имеет лишь одну обмотку — обмотку высшего напряжения, а обмоткой низшего напряжения служит часть обмотки высшего напряжения. Обмотка высшего напряжения автотрансформатора может быть первичной (рис. 9.25, а) или вторичной (рис. 9.25, б).

При заданном первичном напряжении автотрансформатора и числе витков w_1 амплитуду магнитного потока Φ_m в магнитопроводе можно считать вполне определенной, так как по (9.3а) и (8.4в)

$$U_1 \approx 4.44 f w_1 \Phi_m$$

(равенство получается для идеализированного трансформатора). Этот магнитный поток индуцирует в каждом витке обмотки ЭДС, практически не зависящую от тока в обмотке. Следовательно, постоянными поддерживаются и напряжения между отдельными частями обмотки.

Напряжения и токи автотрансформатора связаны теми же приближенными соотношениями, что и в трансформаторе [см. (9.12) и (9.19)]:

$$U_1/U_2 \approx w_1/w_2 \approx I_2/I_1.$$

Ток в общей части обмотки равен разности первичного I_1 и вторичного I_2 токов (рис. 9.25). Фазы этих токов, так же как у трансформатора (рис. 9.10), почти одинаковые, поэтому, пренебрегая влиянием намагничивающего тока I_{1x} , можно считать, что в общей части обмотки действующее значение тока равно разности $|I_1 - I_2|$.

Если коэффициент трансформации $n_{12} = w_1/w_2$ лишь немного отличается от единицы, то действующие значения токов I_2 и I_1 почти одинаковые и их разность $|I_2 - I_1|$ мала по сравнению с каждым из них. Поэтому общую часть первичной и вторичной обмоток можно сделать из значительно более тонкого провода, т. е. стоимость обмотки автотрансформатора меньше, чем обмоток трансформатора, и для ее размещения требуется меньше места.

Размеры трансформатора зависят от его расчетной полной мощности

$$S_T = U_1 I_1 \approx U_2 I_2,$$

т. е. номинальной полной мощности в сопротивлении нагрузки трансформатора, а у автотрансформатора его расчетная полная мощность $S_{ат}$ меньше полной мощности в сопротивлении нагрузки.

Расчетная полная мощность общей части обмотки автотрансформатора (рис. 9.25, а)

$$S' \approx U_2 (I_2 - I_1) \approx U_2 I_2 (1 - w_2/w_1);$$

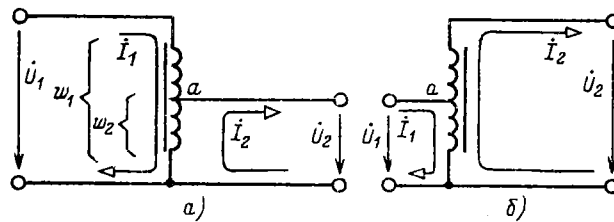


Рис. 9.25

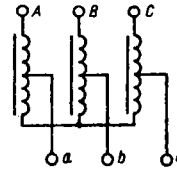


Рис. 9.26

расчетная полная мощность остальной части обмотки

$$S'' \approx (U_1 - U_2) I_1 = U_1 I_1 (1 - w_2/w_1),$$

а так как приближенно $U_2 I_2 \approx U_1 I_1$, то $S' \approx S'' \approx S_{\text{ат}}$.

Расчетная полная мощность каждой из обмоток обычного трансформатора

$$S_T = U_1 I_1 \approx U_2 I_2.$$

Следовательно, при одной и той же полной мощности в сопротивлении нагрузки получается следующее соотношение между расчетными полными мощностями автотрансформатора и трансформатора:

$$S_{\text{ат}}/S_T = 1 - w_2/w_1,$$

т. е. чем меньше различаются числа витков w_2 и w_1 , тем выгоднее применение автотрансформатора.

Итак, преимущества автотрансформатора уменьшаются с увеличением коэффициента трансформации. Кроме того, только при высшем и низшем напряжениях одного порядка электрическое соединение цепей высшего и низшего напряжений не встречает препятствий. Но автотрансформатор нельзя применить, например, для питания распределительной сети 220 В от сети высокого напряжения 6000 В. При таком автотрансформаторе не только пришлось бы рассчитать изоляцию распределительной сети на 6000 В, что чрезвычайно увеличило бы ее стоимость, но и пользоваться такой распределительной сетью было бы опасно для жизни.

Изменением положения точки a на обмотке автотрансформатора (рис. 9.25) можно плавно регулировать вторичное напряжение, например в лабораторных автотрансформаторах (ЛАТР), у которых одним из выводов вторичной цепи служит подвижный контакт.

Обмотки трехфазных автотрансформаторов обычно соединяются звездой с выведенной нейтральной точкой или без нее (рис. 9.26).

9.14. МНОГООБМОТОЧНЫЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ

Во многих электрических установках желательна энергетическая связь нескольких цепей с различными номинальными напряжениями. Такую связь можно реализовать при помощи многообмоточного трансформатора, имеющего одну или несколько первичных обмоток и несколько вторичных обмоток. Простейший из многообмоточных трансформаторов — трехобмоточный — широко применяется в современных сетях высокого напряжения.

Трехобмоточный трансформатор имеет три электрически не связанные между собой обмотки: высшего напряжения (ВН) с числом витков w_1 , среднего напряжения (СН) с числом витков w_2 и низшего напряжения (НН) с числом витков w_3 , например ВН — 220 кВ, СН — 38,5 кВ, НН — 11 кВ (рис. 9.27, а). Эти три обмотки трансформатора (одна первичная и две вторичные) размещены на одном общем магнитопроводе, который ничем не отличается от магнитопровода двухобмоточного трансформатора. Намагничивающий ток первичной обмотки трехобмоточного трансформатора возбуждает в магнитопроводе магнитный поток, который индуцирует во всех обмотках ЭДС, пропорциональные числам витков обмоток. Если вторичные обмотки нагружены токами $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$, то МДС первичной обмотки должна уравновешивать размагничивающее действие МДС этих токов и, кроме того, иметь намагничивающую составляющую МДС. Поэтому аналогично (9.4)

$$\dot{I}_1 w_1 = \dot{I}_2 w_2 + \dot{I}_3 w_3 + \dot{I}_{1x} w_1, \quad (9.26)$$

и первичный ток трансформатора можно рассматривать как сумму приведенных токов второй и третьей обмоток и намагничивающего тока (9.10а):

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2' + \dot{I}_3' + \dot{I}_{1x}, \quad (9.27)$$

где $\dot{I}_2' = (w_2/w_1)\dot{I}_2$; $\dot{I}_3' = (w_3/w_1)\dot{I}_3$.

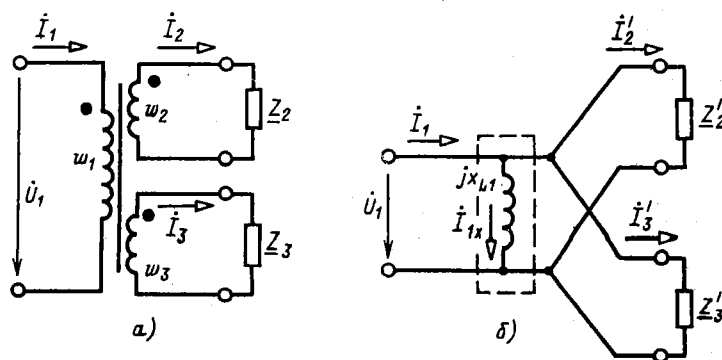


Рис. 9.27

Таким образом, в трехобмоточном трансформаторе происходит передача энергии одновременно в две вторичные цепи второй и третьей обмоток.

Вероятность одновременной номинальной нагрузки обеих вторичных обмоток, при которой, кроме того, токи нагрузки I_2 и I_3 совпадают по фазе, мала. Поэтому первичная обмотка обычно рассчитывается на номинальную мощность меньшую, чем сумма номинальных мощностей вторичных обмоток. Номинальной мощностью трехобмоточного трансформатора считается полная мощность обмотки наибольшей мощности.

У трехобмоточного трансформатора различают три коэффициента трансформации

$$n_{21} = w_2/w_1; \quad n_{31} = w_3/w_1; \quad n_{23} = w_2/w_3 = n_{13}/n_{12},$$

которые определяются отношением соответствующих напряжений при холостом ходе, как и для двухобмоточных трансформаторов [см. (9.13)].

На рис. 9.27, б приведена схема замещения идеализированного трехобмоточного трансформатора, подобная схеме замещения на рис. 9.6, где

$$\underline{Z}'_2 = \underline{Z}_2/n_{21}^2 \quad \text{и} \quad \underline{Z}'_3 = \underline{Z}_3/n_{31}^2$$

— приведенные комплексные сопротивления цепей нагрузки.

В последние годы вместо трехобмоточных трансформаторов во многих случаях применяются трансформаторы, у которых обмотки ВН и СН имеют автотрансформаторную связь, а трансформаторная связь остается лишь для обмотки НН, изолированной от обмоток ВН и СН.

9.15. КОНСТРУКЦИИ МАГНИТОПРОВОДОВ И ОБМОТОК

Условия работы трансформатора определяют ряд особенностей в конструкции основных частей трансформатора: магнитопровода, обмоток и бака с маслом у трансформаторов с масляным охлаждением.

Магнитопровод трансформатора набирается из листов электротехнической стали толщиной 0,35 или 0,5 мм, содержащей для уменьшения мощности потерь от вихревых токов до 4–5% кремния. Для получения изоляции между листами их перед сборкой магнитопровода покрывают изоляционным лаком. Листы стягивают в пачки стальными шпильками, изолированными от листов, чтобы не образовались короткозамкнутые витки. В зависимости от положения магнитопровода по отношению к обмоткам принято различать стержневые трансформаторы (рис. 9.28), у которых обмотки охватывают стержни магнитопровода, и броневые (рис. 9.29), у которых магнитопровод частично охватывает обмотки. Те и другие магнитопроводы могут быть как у однофазных (рис. 9.28, а), так и у трехфазных (рис. 9.28, б) трансформаторов.

Стержневой магнитопровод составляют стержни, на которых размещаются обмотки, и два ярма, замыкающие магнитную цепь. Он проше

по конструкции, чем броневой, и облегчает получение необходимой изоляции обмоток. По этим причинам у большинства трансформаторов применяются стержневые магнитопроводы.

В трансформаторах средней и большой мощности для лучшего охлаждения между отдельными пакетами пластин магнитопровода предусмотрены каналы для масла. Ядро стержневого магнитопровода имеет ступенчатую или прямоугольную форму поперечного сечения. Некоторым преимуществом броневого магнитопровода можно считать частичную защиту обмоток от механических повреждений. Броневой магнитопровод применяется для сухих трансформаторов малой мощности.

Для уменьшения магнитного сопротивления стыков отдельных листов магнитопровода листы в стыках обычно шихтуются (рис. 9.30), т. е. укладываются впереплет.

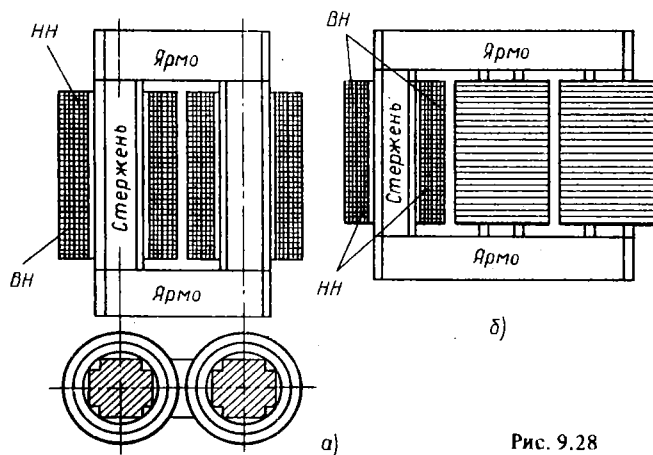


Рис. 9.28

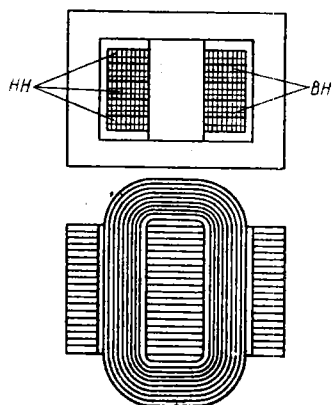


Рис. 9.29

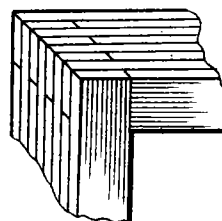


Рис. 9.30

Обмотки ВН и НН в зависимости от их взаимного расположения подразделяются на концентрические и чередующиеся. Концентрические обмотки применяются в большинстве трансформаторов. Простейшая из них — цилиндрическая обмотка, катушки которой имеют форму двух коаксиальных цилиндров (ВН и НН на рис. 9.28). Ближе к стержню располагается обмотка НН, так как ее проще изолировать от магнитопровода. Обмотка ВН охватывает обмотку НН. Обмотки отделяются друг от друга изолирующим цилиндром из специального картона или бумаги, пропитанной бакелитом.

Относительно редко, преимущественно в броневых трансформаторах, применяются чередующиеся обмотки, в которых чередуются положенные друг на друга дискообразные катушки НН и ВН (рис. 9.29), причем крайние катушки, прилегающие к ярму, должны относиться к обмотке НН.

9.16. ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Мощность потерь в трансформаторе относительно номинальной мала, но ее значение в трансформаторах большой мощности может быть велико, поэтому одной из важнейших задач при конструировании трансформаторов является обеспечение отвода в окружающую среду теплоты, нагревающей обмотки и магнитопровод. Задача эта тем сложнее, чем больше мощность трансформатора. При заданных индукции в магнитопроводе и плотности тока в обмотках мощность потерь возрастает пропорционально увеличению объема трансформатора, т. е. пропорционально кубу увеличения его линейных размеров, а поверхность теплоотдачи увеличивается лишь пропорционально квадрату увеличения линейных размеров. Следовательно, с увеличением мощности трансформатора приходится искусственно увеличивать поверхность охлаждения и усиливать теплоотдачу с этой поверхности. Ухудшение условий теплоотдачи с ростом мощности наблюдается в большинстве электрических машин и аппаратов.

Для охлаждения трансформатора применяются: естественное воздушное охлаждение, естественное масляное охлаждение, масляное охлаждение с принудительным воздушным охлаждением, масляное охлаждение с принудительной циркуляцией масла.

Естественное воздушное охлаждение применяется в сухих трансформаторах: теплота, выделяющаяся в трансформаторе, отдается непосредственно окружающему воздуху. Вследствие плохой теплоотдачи распределение температуры в сухом трансформаторе может быть весьма неравномерным. Кроме того, низкая электрическая прочность воздуха (2,1 МВ/м) ухудшает условия изоляции в сухом трансформаторе; приходится считаться и с тем, что пыль, оседая на обмотках, существенно ухудшает их изоляцию. По этим причинам воздушное охлаждение применяется преимущественно в трансформаторах малой мощности и низкого напряжения.

Основное значение в настоящее время имеют масляные трансформаторы, у которых магнитопровод с обмотками помещен в стальной бак, наполненный тщательно очищенным минеральным маслом. Последнее, нагреваясь, циркулирует в баке и, омывая обмотки и магнитопровод, охлаждает их (конвекция). Электрическая прочность масла в несколько раз выше, чем воздуха (см. табл. 2.2), что позволяет значительно уменьшить расстояния от обмоток до магнитопровода.

В трансформаторах мощностью до 20–30 кВ · А достаточную поверхность охлаждения дает гладкий бак. С увеличением мощности трансформаторов до 15–20 тыс. кВ · А применяются трубчатые (см. рис. 9.3) или радиаторные баки с естественным или принудительным воздушным охлаждением их поверхности. Для трансформаторов больших мощностей (примерно от 90 МВ · А) применяются принудительные циркуляция масла и воздушное охлаждение радиаторов.

Объем масла в баке трансформатора во время работы значительно изменяется при нагревании и охлаждении. Когда масло сжимается, внутрь бака проникает влажный воздух и отдает влагу весьма гигроскопичному маслу. В результате на дне бака собирается слой воды, а электрическая прочность масла резко уменьшается. Кроме того, кислород воздуха вызывает процессы окисления в масле, также снижающие его электрическую прочность. Чтобы защитить масло от соприкосновения с воздухом, баки трансформаторов большой мощности наполняют маслом доверху, а резервуаром для избытка нагретого масла служит расширитель (см. рис. 9.3) — цилиндр из листовой стали. Он укрепляется на крышке трансформатора и соединяется с баком трубопроводом, который заканчивается в расширителе несколько выше его дна. Объем расширителя составляет примерно 10% объема бака. Влага воздуха и осадки в большей части оседают на дне расширителя, откуда периодически удаляются через спусковой кран. Поверхность соприкосновения масла с воздухом в расширителе значительно меньше, чем в баке без расширителя; кроме того, масло здесь более низкой температуры и меньше окисляется.

Недостатком масляного охлаждения является горючесть масла (температура возгорания масла около 160 °С), оно пожаро- и взрывоопасно. Газы, образующиеся при возгорании масла, могут сорвать крышку трансформатора, и масло будет выброшено из бака. Для предупреждения деформации бака при образовании газов трансформаторы мощностью 1000 кВ · А и больше имеют выхлопную трубу (см. рис. 9.3), которая закрывается стеклянной пластиной — мембраной. При образовании большого объема газов они выдавливают мембрану и выходят в атмосферу.

Для особо ответственных установок применяются трансформаторы, баки которых заполняются кристаллическим кварцевым песком или негорючей синтетической жидкостью (совтолом); эта жидкость и ее пары ядовиты.

Применение жидких хладагентов существенно осложняет эксплуатацию трансформаторов, так как необходимы постоянный надзор за состоянием этих охладителей и периодическая их очистка или замена.

9.17. ТРАНСФОРМАТОРЫ НАПЯЖЕНИЯ И ТОКА

Трансформаторы напряжения и тока применяются, во-первых, для изоляции измерительных приборов и аппаратов автоматической защиты от цепи высокого напряжения, чем достигается безопасность измерения, и, во-вторых, для расширения пределов измерения измерительных приборов.

Трансформаторы напряжения применяются для включения вольтметров и цепей напряжения измерительных приборов (ваттметров, счетчиков, фазометров) и реле, трансформаторы тока — для включения амперметров и цепей тока измерительных приборов и реле.

А. Трансформатор напряжения. Принципиальная схема трансформатора напряжения (ТН) показана на рис. 9.31, а, а его условное обозначение — на рис. 9.31, б. Такой трансформатор подобен силовому трансформатору небольшой мощности. Его первичная обмотка — обмотка ВН с большим числом витков w_1 — включается в цепь, напряжение U_1 которой нужно измерить, а ко вторичной обмотке со значительно меньшим числом витков w_2 — обмотке НН U_2 — присоединяются параллельно друг другу вольтметр и цепи напряжения других приборов. Обычно обмотки w_1 и w_2 concentric — обмотка ВН окружает обмотку НН, как и в силовых трансформаторах (см. рис. 9.31, а, для наглядности обмотки помещены раздельно). Один вывод вторичной обмотки и корпус трансформатора заземляются. Это делается на слу-

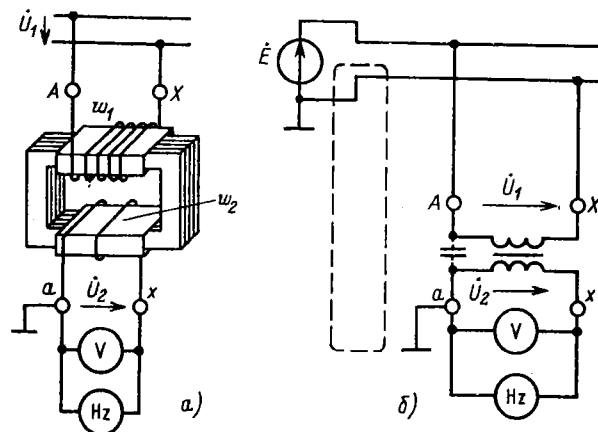


Рис. 9.31

чай повреждения изоляции, а также для того, чтобы замкнуть на землю цепь тока, показанную на рис. 9.31, б штриховой линией, через емкость между первичной и вторичной обмотками трансформатора. Наличие этого тока в цепи приборов снижает точность измерения.

Сопротивление вольтметра и цепей напряжения измерительных приборов относительно велико (порядка тысяч ом), т. е. ТН работает в условиях, близких к режиму холостого хода силового трансформатора. Поэтому падения напряжения на первичной $z_{об1}I_1$ и вторичной $z_{об2}I_2$ обмотках ТН весьма малы, что позволяет считать $U_1 \approx E_{1x}$; $U_2 \approx E_{2x}$ и так как аналогично (9.13)

$$E_{1x}/E_{2x} = w_1/w_2 = n_{12},$$

где n_{12} — коэффициент трансформации, то

$$U_1 = n_{12} U_2, \quad (9.28)$$

т. е. вторичное напряжение связано с первичным постоянным соотношением. Следовательно, измерив низкое напряжение U_2 , можно определить первичное высокое напряжение U_1 .

При выбранных положительных направлениях напряжений (рис. 9.31), одинаковых относительно одноименных выводов трансформатора, фазы вторичного и первичного напряжений должны совпадать. Следовательно, соединение обмоток ТН выполняется согласно группе 0 (§ 9.11), выводы обмоток имеют разметку $A - X, a - x$. Равенство фаз напряжений ТН и цепей измерительных приборов достигается соответствующим соединением выводов вторичной обмотки и выводов приборов. Правильная передача фазы важна, конечно, не для вольтметра, а для ваттметра и счетчика. Вторичное номинальное напряжение большинства ТН имеет одно и то же стандартное значение — 100 В.

Отношение первичного напряжения к вторичному было бы строго постоянным, если бы падения напряжения на обмотках ТН были равны нулю. В действительности эти падения напряжения вызывают неточности в измерении напряжений — погрешность напряжения — и в передаче фазы — угловую погрешность.

Погрешность напряжения, выражаемая в процентах, есть погрешность в измерении первичного напряжения, отнесенная к действительному значению этого напряжения:

$$f_u \% = \frac{U_{1изм} - U_1}{U_1} 100,$$

где $U_{1изм}$ и U_1 — измеренное и действительное первичные напряжения.

Угловая погрешность определяется как угол δ_u между векторами вторичного и первичного напряжений на векторной диаграмме

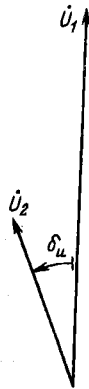


Рис. 9.32

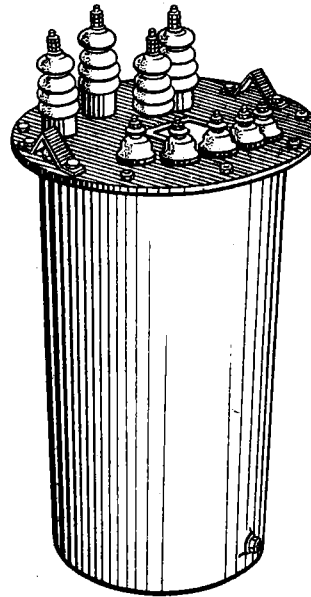


Рис. 9.33

(рис. 9.32), подобной диаграмме на рис. 9.12. Она измеряется в минутах и считается положительной, если вектор вторичного напряжения опережает вектор первичного напряжения.

Для напряжений до 6 кВ ТН изготавливаются сухими с естественным воздушным охлаждением, для напряжений от 6 кВ и выше применяются масляные ТН. Трансформаторы напряжения часто изготавливаются и трехфазными. На рис. 9.33 приведен общий вид трехфазного ТН.

Б. Трансформатор тока. Трансформатор тока (ТТ) со стороны первичной обмотки включается как амперметр, т. е. последовательно с контролируемым объектом (рис. 9.34, а), а его вторичная обмотка замыкается непосредственно через амперметр и цепи тока других измерительных приборов. При отключении измерительных приборов вторичную обмотку ТТ необходимо замкнуть ключом K (рис. 9.34, б). Суммарное сопротивление амперметра и цепей тока измерительных приборов мало (обычно меньше 2 Ом), поэтому ТТ работает в условиях, близких к режиму короткого замыкания трансформатора. Напряжение вторичной обмотки ТТ определяется падением напряжения на относительно малом сопротивлении цепей измерительных и соединительных проводов (обычно 1–12 В). Малому напряжению вторичной обмотки соответствует малое значение ЭДС E_2 , а следовательно, и малое значение магнитного потока в магнитопроводе ТТ:

$$E_2 = 4,44 f w_2 \Phi_m. \quad (9.29)$$

Для возбуждения такого магнитного потока нужна незначительная МДС $w_1 I_{1x}$, поэтому в уравнении

$$\dot{I}_1 w_1 = \dot{I}_2 w_2 + \dot{I}_{1x} w_1 \quad (9.30)$$

этой величиной можно пренебречь и считать

$$\dot{I}_1 w_1 = \dot{I}_2 w_2,$$

или

$$I_1 = (w_2/w_1) I_2 = n_{21} I_2. \quad (9.31)$$

Следовательно, первичный ток может быть определен умножением вторичного тока на постоянный коэффициент трансформации n_{21} .

Таким образом, включение ТТ дает возможность определить ток в цепях ВН на основании измерения небольшого тока с соблюдением мер безопасности. Кроме того, ТТ часто применяется для измерения больших токов в установках с напряжением ниже 1000 В. При правильном соединении выводов ТТ и выводов цепей измерительных приборов ток в измерительных приборах и ток в первичной обмотке ТТ совпадают по фазе. Если амперметр предназначен для постоянной работы с определенным ТТ, то на его шкале наносятся непосредственно значения первичного тока. Вторичный номинальный ток у всех ТТ имеет одно и то же стандартное значение 5 А (в некоторых специальных случаях 1 А).

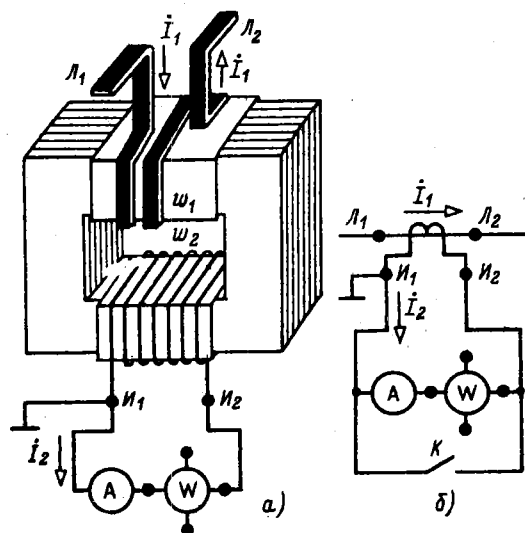


Рис. 9.34

Отношение токов ТТ не строго постоянно из-за влияния МДС $I_{1x} w_1$, которая выше не учитывалась. Это влияние приводит к неточности в измерении тока — *погрешности тока* f_i — и неточности в передаче фазы — *угловой погрешности* δ_i . Обе эти величины определяются аналогично погрешностям ТН.

Первичный ток ТТ в большинстве случаев во много раз больше вторичного, поэтому число витков первичной обмотки w_1 невелико — во много раз меньше числа витков вторичной обмотки w_2 . При измерении больших токов первичная обмотка выполняется в виде провода, продетого в окно магнитопровода. Напряжение на первичной обмотке ТТ во много раз меньше вторичного напряжения ($w_1 < w_2$), которое равно нескольким вольтам, следовательно, напряжение на первичной обмотке часто равно сотым долям вольта.

Ток I_1 задается режимом работы цепи, в которой он измеряется. Увеличивая сопротивление вторичной цепи ТТ, практически нельзя повлиять на значение тока I_1 , можно лишь, как следует из (9.30), увеличить МДС $I_{1x} w_1$ вследствие уменьшения тока I_2 . Следовательно, с увеличением сопротивления вторичной цепи все менее выполняется основное условие точной работы ТТ: $I_{1x} w_1 \ll I_2 w_2$. Поэтому у ТТ указывается наибольшее сопротивление цепи измерительных приборов, подключаемых к вторичной обмотке, при котором погрешность не превысит допустимую. Чем меньше это сопротивление, тем точнее измерение.

Нельзя размыкать вторичную цепь работающего ТТ. В разомкнутой вторичной цепи ТТ ток I_2 равен нулю, но в первичной цепи ток I_1 практически не изменяется. Следовательно, при разомкнутой вторичной цепи весь первичный ток становится намагничивающим, т. е. по (9.30) $I_{1x} w_1 = I_1 w_1$, а так как при номинальном режиме $I_{1x} w_1$ составляет примерно 0,5% $I_1 w_1$, то такое многократное увеличение МДС вызывает очень большое увеличение магнитного потока (ограниченное насыщением магнитопровода). Электродвижущая сила E_2 пропорциональна магнитному потоку [см. (9.29)], и в результате увеличения последнего при размыкании вторичной цепи во вторичной обмотке индуцируется ЭДС порядка сотен вольт (до 1,5 кВ у ТТ на большие токи). Следовательно, возникает опасность для жизни человека, разомкнувшего вторичную цепь. Кроме того, возрастает мощность потерь в магнитопроводе [см. (8.11) и (8.12)] и в результате сильное его нагревание и расширение. То и другое опасно для целостности изоляции и в конечном итоге может привести к пробое изоляции и короткому замыканию на землю со стороны ВЛ.

Чем меньше магнитное сопротивление магнитопровода, тем меньшая МДС требуется для возбуждения в нем того же магнитного потока. По этой же причине для точных ТТ применяются магнитопроводы без стыков из пермаллоя, например в универсальных многопредельных



Для тока 500 А и более применяются одновитковые трансформаторы, к которым относятся и измерительные клещи (рис. 9.36), применяемые для ориентировочных измерений токов от 20 до 1000 А при низком напряжении. Магнитопровод измерительных клещей состоит из двух U-образных частей, стягиваемых сильной пружиной, и

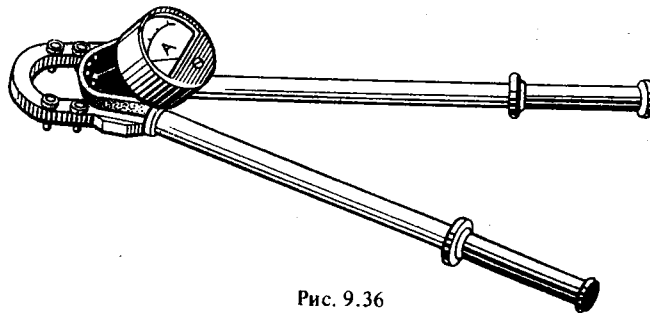


Рис. 9.36

изготовлен из листовой электротехнической стали, а два его стыка тщательно пришлифованы. Чтобы замкнуть магнитопровод вокруг провода с измеряемым током, достаточно нажать рукоятки, раскрыть клещи и ввести в них провод — пружина сомкнет две половины магнитопровода. Провод, сцепленный с магнитопроводом, служит первичной обмоткой. Вторичная обмотка ТТ находится на магнитопроводе и замкнута амперметром.

По точности ТТ и ТН делятся на классы, наименованием которых служит наибольшая допустимая погрешность коэффициента трансформации. Например, если класс точности ТН 0,5, то допустимая погрешность напряжения $\pm 0,5\%$, а допустимая угловая погрешность $\pm 20'$ при первичном напряжении 0,8–1,2 номинального; у ТТ класса точности 1 допустимая погрешность тока $\pm 1,0\%$ и допустимая угловая погрешность $\pm 90'$ при сопротивлении нагрузки 0,25–1,0 номинальной и при первичном токе 1,2–0,1 номинального.

Для правильного выполнения соединений ТН и ТТ с измерительными приборами необходимо руководствоваться разметкой выводов трансформаторов. Выводы ТН обозначаются так же, как выводы силовых трансформаторов ($A - X, a - x$ и т. д.); у ТТ начало и конец первичной обмотки обозначаются соответственно L_1 и L_2 (линия), а начало и конец вторичной обмотки — I_1 и I_2 (измерительный прибор).

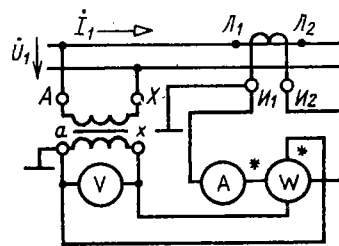


Рис. 9.37

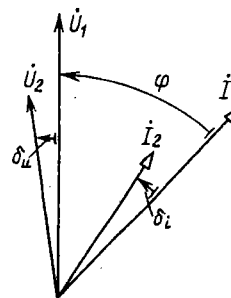


Рис. 9.38

На рис. 9.37 показана схема включения в однофазную цепь комплекта измерительных приборов через ТН и ТТ. Для измерения в трехфазных трехпроводных системах в общем случае необходимы несколько ТТ и ТН, например для измерения активной мощности (рис. 3.13, а) два ТТ и два ТН (или один трехфазный ТН).

Показания ваттметра (или счетчика), включенного через ТН и ТТ, необходимо умножить на произведение коэффициентов трансформации этих трансформаторов. Погрешности ТН и ТТ сказываются на показаниях ваттметра, причем угловые погрешности оказывают существенное влияние на результаты, главным образом, при больших сдвигах фаз между первичными напряжением и током. Вследствие их влияния показания ваттметра пропорциональны не коэффициенту мощности $\cos \varphi$, а $\cos(\varphi + \delta_u - \delta_i)$ (рис. 9.38); при этом угловые погрешности могут складываться, так как часто $\delta_u < 0$, а $\delta_i > 0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию	3
<i>Глава первая. Линейные электрические цепи постоянного тока.</i>	4
1.1. Электротехнические устройства постоянного тока	4
1.2. Элементы электрической цепи постоянного тока	5
1.3. Положительные направления токов и напряжений	7
1.4. Резистивные элементы	9
1.5. Источники электрической энергии постоянного тока	11
1.6. Источники ЭДС и источник тока	12
1.7. Первый и второй законы Кирхгофа	15
1.8. Применение закона Ома и законов Кирхгофа для расчетов электрических цепей	17
1.9. Метод эквивалентного преобразования схем	21
1.10. Метод узловых потенциалов	24
1.11. Метод контурных токов	26
1.12. Принцип и метод наложения (суперпозиции)	29
1.13. Принцип компенсации	30
1.14. Метод эквивалентного источника (активного двухполюсника)	31
1.15. Работа и мощность электрического тока. Энергетический баланс	34
1.16. Условие передачи приемнику максимальной энергии	35
<i>Глава вторая. Линейные электрические цепи синусоидального тока</i>	37
2.1. Электротехнические устройства синусоидального тока	37
2.2. Элементы электрической цепи синусоидального тока	38
2.3. Индуктивный элемент	39
2.4. Емкостный элемент	42
2.5. Источники электрической энергии синусоидального тока	45
2.6. Максимальное, среднее и действующее значения синусоидальных величин	47
2.7. Различные способы представления синусоидальных величин	49
2.8. Закон Ома в комплексной форме для резистивного, индуктивного и емкостного элементов	53
2.9. Первый и второй законы Кирхгофа в комплексной форме	57
2.10. Комплексный метод расчета цепей синусоидального тока	61
2.11. Неразветвленная цепь синусоидального тока	65
2.12. Активное, реактивное, комплексное и полное сопротивления пассивного двухполюсника	69
2.13. Энергетические процессы в резистивном, индуктивном и емкостном элементах	70
2.14. Активная, реактивная, комплексная и полная мощности пассивного двухполюсника	74
2.15. Электрическая цепь с параллельным соединением ветвей	77
2.16. Активная, реактивная, комплексная и полная проводимости пассивного двухполюсника	80
2.17. Эквивалентное преобразование схем последовательного соединения элементов в параллельное	82

2.18. Электрическая цепь со смешанным соединением элементов	83
2.19. Баланс мощности в цепи синусоидального тока	85
2.20. Повышение коэффициента мощности	87
2.21. Резонанс в цепях синусоидального тока	88
2.22. Цепи с индуктивно связанными элементами	94
2.23. Потенциальная диаграмма электрической цепи	98
2.24. Крутовые диаграммы. Фазосдвигающие цепи	99
2.25. Частотные годограф и характеристики цепи	100
2.26. Пассивные четырех- и трехполюсники	101
Глава третья. Трехфазные цепи.	104
3.1. Трехфазные электротехнические устройства	104
3.2. Соединение фаз источника энергии и приемника звездой	106
3.3. Соединение фаз источника энергии и приемника треугольником	109
3.4. Активная, реактивная, комплексная и полная мощности трехфазной симметричной системы.	112
3.5. Сравнение условий работы приемника при соединениях его фаз треугольником и звездой	113
3.6. Измерение активной мощности трехфазной системы	114
3.7. Симметричная трехфазная цепь с несколькими приемниками	117
3.8. Несимметричный режим трехфазной цепи	119
Глава четвертая. Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях.	123
4.1. Общие сведения	123
4.2. Действующее значение периодической несинусоидальной величины	125
4.3. Мощность периодического несинусоидального тока	127
4.4. Электрические фильтры	128
Глава пятая. Переходные процессы в линейных электрических цепях	132
5.1. Общие сведения	132
5.2. Классический метод расчета переходных процессов	133
5.3. Законы коммутации	134
5.4. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним индуктивным элементом	135
5.5. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним емкостным элементом	140
5.6. Разрядка емкостного элемента в цепи с резистивным и индуктивным элементами	143
5.7. Подключение неразветвленной цепи с индуктивным, резистивным и емкостным элементами к источнику постоянной ЭДС	148
5.8. Подключение неразветвленной цепи с индуктивным и резистивным элементами к источнику синусоидальной ЭДС	149
5.9. Операторный метод расчета переходных процессов	151
5.10. Расчет переходных процессов на ЭВМ	157
Глава шестая. Нелинейные электрические цепи	159
6.1. Общие сведения	159
6.2. Цепи с нелинейными двухполюсниками	159
6.3. Цепи с нелинейными трех- и четырехполюсниками	163
Глава седьмая. Магнитные цепи с постоянной магнитодвижущей силой	168
7.1. Элементы магнитной цепи	168
7.2. Закон полного тока для магнитной цепи	169
7.3. Свойства ферромагнитных материалов	170
7.4. Неразветвленная магнитная цепь	175
7.5. Неразветвленная магнитная цепь с постоянным магнитом	178
7.6. Электромеханическое действие магнитного поля	180

130000

Глава восьмая. Катушка с магнитопроводом в цепи переменного тока.	182
8.1. Понятие об идеализированной катушке с магнитопроводом.	182
8.2. Процессы намагничивания магнитопровода идеализированной катушки	184
8.3. Уравнения, схемы замещения и векторные диаграммы реальной катушки с магнитопроводом.	186
8.4. Мощность потерь в магнитопроводе.	190
8.5. Вольт-амперная характеристика катушки с магнитопроводом	192
8.6. Явление феррорезонанса.	194
Глава девятая. Трансформаторы.	196
9.1. Общие сведения	196
9.2. Принцип действия однофазного трансформатора.	199
9.3. Уравнения идеализированного однофазного трансформатора	200
9.4. Схема замещения и векторная диаграмма идеализированного однофазного трансформатора	203
9.5. Уравнения, схема замещения и векторная диаграмма реального однофазного трансформатора	205
9.6. Режим холостого хода трансформатора	207
9.7. Режим короткого замыкания трансформатора	209
9.8. Внешние характеристики трансформатора.	213
9.9. Мощность потерь в трансформаторе.	214
9.10. Особенности трехфазных трансформаторов	216
9.11. Группы соединений обмоток трансформаторов	219
9.12. Параллельная работа трансформаторов.	221
9.13. Однофазные и трехфазные автотрансформаторы.	222
9.14. Многообмоточные трансформаторы.	225
9.15. Конструкции магнитопроводов и обмоток	226
9.16. Тепловой режим трансформаторов	228
9.17. Трансформаторы напряжения и тока	230

Учебное издание

Касаткин Александр Сергеевич

Немцов Михаил Васильевич

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

КНИГА 1

Редактор Б. Я. Жуховицкий

Зав. редакцией М. П. Соколова

Редактор издательства Л. А. Решмина

Художественный редактор В. А. Гозак-Хозак

Технический редактор Г. Г. Самсонова

Корректор Е. С. Арестова

ИБ № 2640

ЛР № 010256 от 07.07.92.

Набор выполнен в издательстве. Подписано в печать с оригинал-макета 27.07.95.

Формат 60 x 88 1/16. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,7. Усл. кр.-отг.

14,94. Уч.-изд. л. 15,72. Тираж 3000 экз. Заказ 1320. С 021.

Энергоатомиздат. 113114. Москва М-114, Шлюзовая наб., 10.

Отпечатано в Московской типографии № 9 Комитета Российской Федерации по печати

109033, Москва, Волоцкая ул., 40.